A geometrical unification of gravitation and electromagnetism in five-dimensional space-time. L'Univers sans Foi ni Loi

Michel et Benoit Vaugon, Stephane Collion, Marie Dellinger

Institut de Mathématiques, Université Paris VI, Equipe Géométrie et Dynamique, 175 rue Chevaleret, 75013 Paris.

email : vaugon@math.jussieu.fr, stephane.collion@wanadoo.fr

Mai 2010

Résumé

Nous considérons dans ce papier le problème de la géométrisation de la physique classique, à savoir la gravitation et l'électromagnétisme. Il s'agit donc de montrer que tous les concepts physiques classiques, masse, énergie, charge, trajectoire, lois de Maxwell-Lorentz, etc.. ne sont que des manifestations de la géométrie, par exemple de la courbure, de l'espacetemps considéré comme une variété Lorentzienne ; ainsi, aucun "objet physique" n'est placé dans l'espacetemps, aucune loi n'est posée, tout n'est que géométrie ! Nous montrons pourquoi ce but est sans doute inaccessible dans un espacetemps de dimension 4, et mettons en avant, en étudiant ce cas, les concepts menant à une solution dans un espacetemps de dimension 5. La solution que nous proposons ne repose pas sur des mathématiques vraiment nouvelles, mais sur un regard différent porté sur l'axiomatique des théories classiques, et en particulier la suppression d'une hypothèse, à notre avis injustifiée, sur la courbure de Ricci. Ce travail s'inscrit donc dans la lignée des tentatives d'Einstein, Weyl, Nordstrom, Kaluza, Klein, Rainich, Wheeler. Version du 27 12 2010.

We consider in this paper, the geometrization of classical physics, i.e gravitation and electromagnetism. The goal is therefore to show that all the usual physical concepts, such as mass, energy, charge, trajectory, Maxwell-Lorentz law, are only various aspects of the geometry,for exemple curvature, of spacetime considered as a Lorentzian manifold ; that is no object is "put" in spacetime, no laws are given, everything is only geometry ! We show why this goal is probably inaccessible in dimension 4, and put forward, while studying this case, the concepts leading to a solution in a five-dimensional spacetime. The solution we propose does not use truly new mathematics, but more a different view of the classical axiomatism of the classical theories, and in particular the suppression of an hypothesis usually made about the Ricci curvature, unjustified from our point of view. This work is therefore in the continuation of the various attempts made since Einstein, Weyl, Nordstrom, Kaluza, Klein, Rainich, Wheeler. [1]

1. AMS subject classification : 83C22, 83E05, 83E15

1 Introduction

Au commencement était l'espacetemps et la liberté.
Puis sont venus les physiciens, leurs lois et leurs machines.

L'axiomatique de la relativité générale est d'un grand esthétisme et d'une grande simplicité, tant qu'on ne cherche pas à y inclure complètement l'électromagnétisme. En effet, lorsque l'on passe de la mécanique classique à la relativité restreinte, puis à la relativité générale, en acceptant des structures mathématiques certes plus sophistiquées, on diminue le nombre de "principes" et autres lois. Ainsi, par exemple disparaissent des concepts peu clairs tel que le temps absolu, les observateurs galiléens, le concept de ligne droite. La relativité générale peut être vu comme l'aboutissement de cette démarche, visant à offrir à l'univers le cadre le plus général (!) et le plus débarrassé de concepts et principes ad hoc et superflus. Ne subsiste, car il faut quand même bien modéliser quelque chose, qu'une métrique Lorentzienne. Mais mathématiquement, on récupère toute la théorie et les théorèmes de géométrie différentielle et Riemannienne, et en particulier, nous le verrons, la seconde identité de Bianchi, qui apparaîtra, une fois encore, comme un résultat clef, bien qu'élémentaire sur un plan mathématique.

Un des principes physiques de base qu'il s'agit fondamentalement d'abandonner lorsque l'on passe à la relativité générale est l'idée d'introduire de la matière dans un espace(-temps) considéré comme cadre des expériences physiques. Matière et géométrie sont coexistant, c'est ce qu'exprime l'équation d'Einstein. Pourtant, historiquement, bien qu'étant l'idée fondamental d'Einstein, des siècles d'expériences physiques consistant à introduire des objets "tests" dans un cadre expérimental (billes sur un plan incliné, particules chargées dans un champ magnétique, etc...) n'ont pas permis de pousser, même pour Einstein et ses premiers "adeptes", cette idée jusqu'à son aboutissement. En effet, encore aujourd'hui, dans la plupart des cours de relativité générale, on "introduit" de la matière dans la variété Lorentzienne espacetemps, modélisée par le tenseur d'énergie-impulsion, le lien entre matière et courbure étant donné par l'équation d'Einstein.

Le fait remarquable, (qui a d'ailleurs inspiré historiquement l'équation d'Einstein), est que la deuxième identité de Bianchi appliquée au premier membre de cette équation, représentant la courbure (d'Einstein), coïncide avec la loi, physiquement naturelle de la conservation de la masse appliquée au deuxième membre de l'équation représentant la matière (un fluide).

C'est cette coïncidence qui suggère un autre regard sur l'axiomatique. On peut en effet considérer que les grandeurs qui caractérisent la matière ne sont que des caractéristiques de la géométrie de la variété Lorentzienne. Autrement dit, les "objets physiques", dont les humains cherchent à décrire le comportement, ne sont en fait que des manifestations de la géométrie, et tout particulièrement de la courbure, de l'espacetemps. Plus précisément, les grandeurs comme, par exemple, la densité d'énergie, la densité de masse, la pression, les "vecteurs unitaires d'un fluide", sont définies comme des caractéristiques de la courbure et c'est alors l'identité de Bianchi seule qui donne l'équation d'Einstein.

L'axiomatique de la relativité générale se résume alors, dans un premier temps, de la manière suivante :

A. L'espacetemps est une variété lorentzienne de dimension 4. (Les obser-

vateurs, le temps propre, l'espace vu par un observateur, sont définis classiquement)

B. On définit, canoniquement, à partir du tenseur de courbure de la variété lorentzienne, des grandeurs qui vont représenter physiquement : la densité d'énergie, la densité de masse d'un fluide, la pression d'un fluide, les vecteurs unitaires des courbes de fluide, etc...

Aucun "objet physique" n'est rajouté, tout n'est que géométrie.

Aucune loi n'est rajoutée : La deuxième identité de Bianchi donne alors : la loi de conservation de la masse (lorsqu'elle a lieu d'être), le fait que pour un fluide v-parfait, les courbes de fluide sont des géodésiques, l'équation vérifiée par un fluide parfait, etc... Donc cette identité redonne : la mécanique classique (gravitation) en approximation, les "big-bang" et "big-crunch" pour un domaine supposé homogène et isotrope, l'étude de la symétrie sphérique en espace, (Schwarschild), donc les mouvement des planètes, déviation de la lumière, trous noirs. On retrouve précisément toute la relativité générale appliquée aux fluides parfaits.

Malheureusement, cette vision coince sur l'électromagnétisme. En effet, on peut, en suivant cette démarche, définir canoniquement le tenseur d'énergie impulsion représentant l'électromagnétisme, mais on ne parvient pas à retrouver canoniquement la 2-forme classique de l'électromagnétisme et les équations de Maxwell-Lorentz. C'est ce problème que les précurseurs, Einstein, Weyl, Kaluza, Klein, Rainich ont tenté de résoudre. Nous y reviendrons bien sûr plus loin.

En résumé, l'étude des fluides de matière "neutre" en relativité générale se ramène entièrement à l'étude des variétés lorentziennes. Autrement dit, "les lois de la physique" concernant les fluides de matière ne sont que des traductions de théorèmes de géométrie Riemannienne. Ce n'est cependant pas le cas pour l'électromagnétisme qui oblige encore, pour avoir une description précise en relativité générale, à "introduire" dans la variété espacetemps une 2-forme exacte vérifiant des "lois", à savoir les équations de Maxwell.

Pour conclure cette introduction, il est intéressant de remarquer que, dans l'axiomatique de la relativité générale, il n'y a aucun "principe" général, contrairement à la physique classique ou à la relativité restreinte. Dans ces deux dernières, on suppose l'homogénéité et l'isotropie des espacetemps, ainsi que l'invariance des lois suivant les observateurs Galiléens, ce qui se traduit mathématiquement par l'invariance des lois de la physique sous l'action du groupe de Galilée ou de Lorentz. Plus rien de ceci ne subsiste en relativité générale. L'homogénéité, l'isotropie ou plus généralement l'invariance sous l'opération de certains groupes d'isométries que l'on suppose parfois ne sont que des approximations qui permettent de faire des calculs approchés et ne constituent pas des principes généraux. Ils est amusant de constater que ce sont essentiellement les "principes" que l'on a supposés en physique classique ou relativité restreinte qui ont amené à l'axiomatique de la relativité générale, mais que pour celle-ci, il n'en subsiste plus, (il n'y a plus de lois non plus si l'on ne s'intéresse pas à l'électromagnétisme).

Nous avons placé en dernière section un résumé de nos principales notations.

2 L'espacetemps à 4 dimensions. Ses limitations.

Cette section reprend le chapitre 15 du manuscrit de cours de Michel V.

2.1 Définition des grandeurs physiques à partir du tenseur de courbure

Les grandeurs physiques telles que la densité d'énergie, la densité de masse, la pression, les "courbes" d'un fluide, les champs électomagnétiques,.... etc... ont été choisies pour décrire le comportement de la "matière" suivant l'évolution des théories physiques. Elles correspondent aux "grandeurs" observées à l'échelle humaine et sont pertinentes en physique classique et en relativité restreinte, mais elles ne sont pas nécessairement très adaptées à la théorie de la relativité générale. Les définitions qui vont suivre peuvent donc paraître artificelles (bien qu'elles soient canoniques) puisqu'elles sont guidées essentiellement par le fait qu'on veuille retrouver les notions de la physique classique.

Suivant les domaines de l'espace temps, les "objets physiques" qui s'y trouvent peuvent être différents. On conçoit en effet que, dans certains domaines, il n'existe pas de fluide de matières seulement des champs électromagnétiques ou bien le contraire, ou bien rien du tout ... Les définitions des grandeurs physiques sur un domaine de l'espace-temps vont alors dépendre de la structure lorentzienne de ce domaine, notamment de sa courbure d'Einstein :

$$G = Ricc - \frac{1}{2}Rg$$

On commence donc par classer les domaines suivants leurs "types" de courbure d'Einstein. On va se limiter aux domaines pour lesquels les objets physiques que l'on va définir à partir de la courbure ont déjà été observés, on va même se limiter, pour simplifier, aux domaines pour lesquels il ne va "exister" que des fluides parfaits () et des champs élctromagnétiques. Bien entendu, si l'on prend au hasard un domaine d'une variété lorentzienne, on peut tomber sur une partie de l'espace-temps n'ayant jamais été observée et il est alors difficile de savoir quels objets physiques seraient intéressants à définir. On ne se posera pas ici ce genre de questions. Les domaines sélectionnés sont ceux qui vérifient la "condition d'énergie dominante" car, jusqu'à présent, seuls de tels domaines ont été observés.

Condition d'énergie dominante : Une variété lorentzienne (Ω, g) de tenseur de courbure d'Einstein G vérifie la condition d'énergie dominante si, quel que soit le vecteur $\vec{v}$ de genre temps, $G(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ et si le vecteur densité d'énergie-impulsion défini par ${}^eG(\vec{v})$ est de genre temps ou isotrope, où ${}^eG$ désigne l'endomorphisme associé à G par g.

Physiquement, cette condition veut dire que, quel que soit l'observateur $\vec{v}$, la densité d'énergie vue par $\vec{v}$ est toujours positive et le vecteur densité d'energie impulsion vu par cet observateur n'a pas une "vitesse" (vue par cette observateur) plus grande que celle de la lumière. On traduit grossièrement ce

dernier point en disant qu'aucune information (”transportée par de l'énergie”) ne peut aller plus vite que la vitesse de la lumière dans Ω. Enfin, notons qu'il est coutumier dans la littérature sur la relativité générale de présenter la condition d'énergie dominante comme un axiome, mais nous ne voyons aucun intérêt à cela et préfèrons supposer qu'il peut exister des domaines de l'espace-temps où cette condition n'est pas vérifiée.

2.2 Une classification des domaines des variétés lorentziennes par leur tenseur d'Einstein

Une classification complète est donnée dans Hawkings-Ellis [3] mais la présentation sera ici différente car notre objectif est de se servir de la classification pour **définir** les grandeurs physiques habituelles.

Commençons par remarquer que si $\vec{u_x}$ est un vecteur unitaire de genre temps donné sur une variété lorentzienne (M, g), alors tout tenseur T 2-fois covariant symétrique au point x se décompose **de manière unique** sous la forme

$$T_{ij} = Au_iu_j + B(g_{ij} + u_iu_j) + \Pi_{ij} + (q_iu_j + q_ju_i) \tag{1}$$

où

- A et B sont deux réels
- $\vec{u_x} \in Ker\,{}^e\Pi_x$, où ${}^e\Pi$ est l'endomorphisme associé à Π par g. On a donc $\Pi_{ij}u^i = 0$
- $tr\,{}^e\Pi_x = 0$ c'est-à-dire $\Pi_{ij}g^{ij} = 0$
- $\vec{q_x}$ est g-orthogonal à $\vec{u_x}$ c'est-à-dire $q_iu^i = 0$.

On en déduit en particulier que

$$A = T_{ij}u^iu^j \qquad B = \frac{1}{3}T_{ij}(g^{ij} + u^iu^j) \qquad \text{et} \qquad q^i = -T_{jk}u^j(g^{jk} + u^ku^i)$$

Cette décomposition de T est, bien sûr, liée au choix de $\vec{u_x}$, mais dès que $\vec{u_x}$ peut être défini canoniquement, A_x, B_x, Π_x et q_x sont déterminés sans ambiguïtés et ce sont des objets qui, dans le cas où T est la courbure d'Einstein, définiront les ”grandeurs physiques ” cherchées. Les domaines dans lesquels le choix de $\vec{u_x}$ est canonique seront, par définition, les domaines pour lesquels il existe un fluide (et alors $\vec{u_x}$ sera interprété comme le vecteur unitaire tangent à la courbe du fluide) : ils correspondront aux types 1 ou 2 explicités ci-dessous. Dans tous les cas, la terminologie couramment utilisée pour les grandeurs définies par (1) lorsque $T = G$ est la suivante :

- A_x est la densité d'energie au point x vue par l'observateur $\vec{u_x}$.
- B_x est la pression au point x vue par l'observateur $\vec{u_x}$.
- Π_x est le tenseur de pression anisotrope au point x vu par l'observateur $\vec{u_x}$.
- q_x est le flux d'énergie vu par l'observateur $\vec{u_x}$.

Comme on l'a déjà dit, on se limite ici aux domaines qui ne vont contenir que (éventuellement) des fluides et de l'électromagnétisme. On limite alors le tenseur de courbure d'Einstein à être de l'un des types suivants :

Type 0 : Le vide de matière et d'électromagnétisme

Les domaines où, en tout point x du domaine, $G_x = 0$ (ce qui équivaut à la nullité de la courbure de Ricci), représentent les parties de l'espace-temps où il n'y a ni fluide ni champ électromagnétique ni rien d'autre. Attention, ces domaines peuvent être géométriquement complexes et sont particulièrement intéressants : on retrouve par exemple dans ces domaines les domaines à symétries sphériques, le modèle de Schwarzshild et les trous noirs non chargés.

Type 1 : Fluide non chargé

Un domaine est dit de type 1 si en tout point x du domaine, ${}^eG_x$ admet
- Une valeur propre $-\mu < 0$ d'espace propre $\mathcal{E}_{-\mu}$ de dimension 1 et de genre temps.
- Une valeur propre λ vérifiant $-\mu < \lambda < \mu$ d'espace propre $\mathcal{E}_\lambda$ de dimension 3 tel que $\mathcal{E}_\lambda \perp_g \mathcal{E}_{-\mu}$.

Cela équivaut au fait qu'il existe une base g-orthonormée dans laquelle :

$$(G^i{}_j) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \mu > 0 \text{ et } -\mu < \lambda < \mu.$$

De tels domaines représentent physiquement les domaines où il n'existe qu'un fluide. On **définit** alors dans ce cas sans ambiguïté :
- **Le vecteur unitaire $\vec{u_x}$ tangent à la courbe du fluide** comme étant l'unique vecteur unitaire et dans l'orientation de $\mathcal{E}_{-\mu}$.
- **La densité d'énergie du fluide au point** x comme étant le réel positif μ.
- **La pression du fluide au point** x comme étant le réel λ.

Dans ce cas, d'après (1), G_x se décompose de manière unique sous la forme :

$$G_{ij} = \mu u_i u_j + \lambda(g_{ij} + u_i u_j)$$

Remarque : Si $\lambda = 0$, il n'y a pas de pression et on obtient un domaine où il n'y a qu'un fluide **vraiment parfait** et, dans ce cas, la densité d'énergie est aussi la **densité de masse** par définition.

Type 2 : Association fluide parfait et champ électromagnétique

Un domaine est dit de type 2 si en tout point x du domaine, ${}^eG_x$ admet
- Une valeur propre $-\mu < 0$ d'espace propre $\mathcal{E}_{-\mu}$ de dimension 1 et de genre temps.
- Une valeur propre λ_1 d'espace propre $\mathcal{E}_{\lambda_1}$ de dimension 1 tel que $\mathcal{E}_{\lambda_1} \perp_g \mathcal{E}_{-\mu}$.
- Une valeur propre λ_2 d'espace propre $\mathcal{E}_{\lambda_2}$ de dimension 2 tel que $\mathcal{E}_{\lambda_2} \perp_g (\mathcal{E}_{\lambda_1} \oplus \mathcal{E}_{-\mu})$ et tel que $-\mu < \lambda_1 < \lambda_2 < \mu$.

Cela équivaut au fait qu'il existe une base g-orthonormée dans laquelle :

$$({G^i}_j) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \mu > 0 \text{ et } -\mu < \lambda_1 < \lambda_2 < \mu.$$

De tels domaines représentent physiquement l'association d'un fluide parfait et d'un champ électromagnétique.
On **définit** alors dans ce cas sans ambiguïté :

- **Le vecteur unitaire $\vec{u_x}$ tangent à la courbe du fluide** comme étant l'unique vecteur unitaire et dans l'orientation de $\mathcal{E}_{-\mu}$.
- **La densité d'énergie du fluide au point** x comme étant le réel positif μ (somme de la densité d'énergie du fluide et de la densité d'énergie électromagnétique définies ci-dessous).
- **La densité d'énergie du fluide au point** x comme étant le réel positif $\mu - \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$.
- **La densité d'énergie électromagnétique au point** x comme étant le réel positif $\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$.
- **La pression du fluide au point** x comme étant le réel $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
- **La pression électromagnétique au point** x comme étant le réel $\frac{1}{6}(\lambda_2 - \lambda_1)$.
- **Le tenseur électromégnétique au point** x **:** Π_{ij} à trace nulle donné par (1) lorsque $T = G$.

La justification du choix de ces grandeurs sera justifié dans la section 2.3.1. Dans ce cas, d'après (1), G_x se décompose de manière unique sous la forme :

$$G_{ij} = \mu u_i u_j + \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{6} \right) (g_{ij} + u_i u_j) + \Pi_{ij}$$

Remarques : dans la décomposition précédente, on a bien $\Pi_{ij} g^{ij} = 0$. D'autre part, notons qu'il existe pour ce type 2 un vecteur $\vec{v_x}$ de genre espace, déterminé canoniquement à l'orientation près par $\mathcal{E}_{\lambda_1}$

Pour les types de domaines qui vont suivre, il n'y aura plus de fluide, seulement, par définition, un champ électromagnétique.

Type 3 : Un exemple de champ électromagnétique dans le vide de matière

Un domaine est dit de type 3 si en tout point x du domaine, ${}^eG_x$ admet

- Une valeur propre $-\mu < 0$ d'espace propre $\mathcal{E}_{-\mu}$ de dimension 2.
- Une valeur propre $\lambda = \mu$ d'espace propre $\mathcal{E}_\lambda$ de dimension 2 de genre espace tel que $\mathcal{E}_\lambda \perp_g \mathcal{E}_{-\mu}$.

Cela équivaut au fait qu'il existe une base g-orthonormée dans laquelle :

$$({G^i}_j) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \mu > 0.$$

De tels domaines représentent physiquement un exemple de champ électromagnétique dans le vide de "matière" c'est-à-dire en l'absence de

fluide. Le modèle de Reissner-Nordström [H-E] en donne un exemple en symétrie sphérique en espace (l'électromagnétisme statique). Il n'y a pas ici de décomposition canonique de G_x. Une telle décomposition est en effet liée au choix d'un vecteur $\vec{u_x}$ de genre temps et dans ce type, il n'y a pas de tel vecteur que l'on puisse définir de manière canonique. Les données canoniques de ce type sont le réel μ et les deux espaces propres $\mathcal{E}_{-\mu}$ et $\mathcal{E}_{\mu}$.

Type 4 : Onde électromagnétique

Un domaine est dit de type 4 si en tout point x du domaine, ${}^eG_x$ admet

- Une seule valeur propre 0 d'espace propre $\mathcal{E}_0$ de dimension 3 et $\mathcal{E}_0$ ne contient pas de vecteurs de genre temps et les vecteurs isotrope de $\mathcal{E}_0$ forment un sous espace vectoriel de dimension 1 ($\mathcal{E}_0$ est en fait tangent au cône de lumière).

Cela équivaut au fait qu'il existe une base g-orthonormée dans laquelle :

$$\left(G^i{}_j\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : Le choix du premier élément (vecteur de genre temps) de la base g-orthonormée n'est pas canonique, il peut être choisi de sorte que

$$\left(G^i{}_j\right) = \begin{pmatrix} -\nu & \nu & 0 & 0 \\ -\nu & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\nu > 0$.

De tels domaines représentent physiquement des domaines de l'espacetemps où il n'y a que des ondes électromagnétiques et pas de fluide. On définit alors dans ce cas, sans ambiguïté, une droite isotrope orientée (qui représentera le sens de propagation de l'onde électromagnétique) donnée par le sous-espace vectoriel de dimension 1 formé des vecteurs isotropes de $\mathcal{E}_0$. Si l'on choisit un vecteur isotrope $\vec{i} \in \mathcal{E}_0$, non nul et dans l'orientation, alors G, vu comme 2-fois contravariant, s'écrit sous la forme : $G = \nu\vec{i} \otimes \vec{i}$ avec $\nu > 0$. Cette décomposition n'est pas du type (1) et évidemment ν dépend du choix de $\vec{i}$ (qui lui-même n'est défini qu'au produit d'un réel positif près).

Remarque : Le cas $G_x = -\mu Id$ avec $\mu > 0$ est un cas limite du type 1. Il est compatible avec la condition d'énergie dominante et correspond au cas extrême des fluides incompressibles, voir Choquet-Bruat [2]

2.3 En dimenion 4, la géométrie ne suffit pas pour décrire l'électromagnétisme.

2.3.1 Justification du choix des types 2, 3 et 4

On a choisi de se limiter uniquement aux cas qui contiennent de l'électromagnétisme (et éventuellement un fluide pour le type 2). Pour ceci,

on est parti de la présentation habituelle de l'électromagnétisme en relativité générale qui introduit dans la variété lorentzienne une 2-forme exacte F et on a supposé classiquement que le tenseur d'énergie-impulsion correspondant (qui se rajoute au tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide pour le type 2) est de la forme :

$$T_{ij} = F_{ik}F^k_{\ j} + \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}g_{ij}.$$

On a admis de plus, lorsqu'il y a un fluide, que les vecteurs tangents aux lignes de fluide sont des vecteurs propres de ${}^eG$ (les autres cas sont plus longs à décrire). Alors, compte tenu de la forme spéciale du tenseur T_{ij}, et en supposant la condition d'énergie dominante, des calculs assez rapides montrent que seuls les types 2, 3 et 4 sont possibles. Bien entendu, avec le nouveau regard sur l'axiomatique que l'on présente dans cette section, ce sont les types 2, 3, 4 qui permettent de définir les "grandeurs" de l'électromagnétisme (que l'on a choisi évidemment pour retrouver les notions classiques).

2.3.2 L'électromagnétisme n'est pas purement géométrique en dimension 4

Cependant les domaines de type 2, 3 ou 4 permettent de définir **seulement** les tenseurs suivants :

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)u_iu_j + \frac{1}{6}(\lambda_2 - \lambda_1)(g_{ij} + u_iu_j) + \Pi_{ij} \quad \text{pour le type 2}$$

$$T_{ij} = G_{ij} \quad \text{pour les types 3 et 4.}$$

Ces tenseurs correspondent, dans chacun des cas, au tenseur d'énergie-impulsion classique de l'électromagnétisme seul, mais **ils ne permettent pas de retrouver canoniquement la 2-forme F de l'électromagnétisme** (et à fortiori les équations de Maxwell). On peut remarquer en effet que, pour un tenseur symétrique T_{ij} donné, il existe en général une infinité de tenseurs antisymétriques F_{ij} tels que $T_{ij} = F_{ik}F^k_{\ j} + \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}g_{ij}$.. **On ne peut donc pas, à priori, retrouver l'électromagnétisme classique (c'est-à-dire la 2-forme F et les équations de Maxwell) avec uniquement les données géométriques de la variété lorentzienne.** On peut néanmoins se demander si la donnée du tenseut d'énergie-impulsion T_{ij} de l'électromagnétisme ne suffit pas pour décrire la réalité physique, en particulier le comportement d'un fluide (car finalement seuls les fluides sont observables physiquement). La réponse est négative. On peut s'en douter car le contraire aurait signifié que l'on peut décrire les phénomènes d'origine électromagnétique sans utiliser la 2-forme F, autrement dit sans utiliser le champ électrique et magnétique. On montrera précisément dans la section 2.7 que la connaissance seule du tenseur T_{ij} ne peut pas donner une théorie physique suffisamment "déterministe", contrairement à la théorie classique de l'électromagnétisme en relativité générale qui consiste à introduire dans l'espace-temps la 2-forme F avec son tenseur d'énergie-impulsion et les équations de Maxwell.

En dimension 4, on ne peut donc pas décrire l'électromagnétisme en utilisant uniquement les données géométriques de la variété lorentzienne.

2.4 Où l'on vérifie que les lois fondamentales sur les fluides se déduisent bien de l'identité de Bianchi

On considère un domaine de l'espace-temps de type 1, autrement dit qui ne contient, par définition, qu'un fluide non chargé. On a

$$G_{ij} = \mu u_i u_j + \lambda(g_{ij} + u_i u_j) \qquad \text{avec } \mu > 0 \text{ et } -\mu < \lambda < \mu.$$

2.4.1 Cas d'un fluide vraiment parfait : $\lambda = 0$

Dans ce cas, par définition, μ est la densité de masse. L'identité de Bianchi nous donne

$$0 = \nabla^i G_{ij} = \nabla^i (\mu u_i u_j) = \nabla^i (\mu u_i) u_j + \mu u_i \nabla^i (u_j)$$

Mais comme $u^j u_j = -1$, on a $0 = \nabla^i(u^j)u_j + u^j \nabla^i(u_j) = 2u^j \nabla^i(u_j)$ donc $u^j \nabla^i(u_j) = 0$. On a donc

$$0 = u^j \nabla^i(G_{ij}) = -\nabla^i(\mu u_i).$$

Autrement dit, la divergence du champ de vecteurs $\mu\vec{u}$ est nulle ce qui traduit bien , avec le théorème de Stokes, la loi de conservation de la masse.
On en déduit aussi que $0 = u_i \nabla^i u_j$, c'est-à-dire $D_{\vec{u}}\vec{u} = 0$, ce qui est la définition même du fait que les courbes des fluides, paramétrées de sorte que $\vec{u}$ soit en tout point le vecteur tangent, sont des géodésiques.

2.4.2 Cas plus général d'un fluide parfait "isentropique"

La définition d'un fluide, donnée par les domaines de type 1, ne permet pas dans le cadre général d'introduire la notion de densité de masse à partir de celle de densité d'énergie et de pression. Cela peut s'interpréter physiquement en disant qu'intervient dans ces fluides une notion "d'énergie interne" dont le lien avec la pression , par exemple, dépend de la "nature du fluide". En fait, de l'énergie peut se transformer en "masse" (et réciproquement) dans l'évolution du fluide, et une loi de conservation de la masse peut ne pas être valide dans le cas général. La seule "loi de conservation" qui est toujours vraie est en fait l'identité de Bianchi : $\nabla^i G_{ij} = 0$. La notion de densité de masse peut en fait se définir pour certaines catégories de fluides parfaits comme par exemple les fluides parfaits isentropiques (les fluides vraiment parfaits en sont un cas particulier) : un fluide parfait isentropique est un fluide parfait pour lequel on s'est donné une fonction dérivable $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (appelée la fonction potentiel élastique) qui dépend de la nature du fluide et qui vérifie les deux relations suivantes, inspirées de la mécanique classique des fluides :

- (i) $\mu = \rho(1 + \epsilon(\rho))$
- (ii) $\lambda = \rho^2 \epsilon'(\rho)$

où μ est la densité d'énergie, λ la pression et ρ est par définition la densité de masse du fluide. Comme l'application $x \mapsto x(1 + \epsilon(x))$ est supposée inversible, (i) détermine complètement ρ à partir de μ et de ϵ. La donnée de ϵ détermine aussi grâce à (i) et (ii) une équation qui lie λ et μ, appelée équation d'état du fluide parfait (qui dépend donc de la nature du fluide par l'intermédiaire de ϵ).

On déduit de (i) et de (ii) que

$$\frac{d\mu}{d\rho} = 1 + \epsilon(\rho) + \rho\epsilon'(\rho) \qquad \text{puis } \rho\frac{d\mu}{d\rho} = \lambda + \mu$$

L'identité de Bianchi donne

$$\begin{aligned} 0 = \nabla^i G_{ij} &= \nabla^i \left(\mu u_i u_j + \lambda(g_{ij} + u_i u_j)\right) \\ &= \nabla^i(\lambda+\mu)u_i u_j + (\lambda+\mu)\nabla^i(u_i u_j) + (\nabla^i\lambda)g_{ij} \end{aligned} \tag{2}$$

d'où par une multiplication contractée par u^j, en utilisant que $u_j u^j = -1$ et $u^j\nabla^i u_j = 0$, on obtient :

$$(\nabla^i\mu)u_i + (\mu+\lambda)\nabla^i u_i = 0 \tag{3}$$

Or $\nabla^i\mu = \frac{d\mu}{d\rho}\nabla^i\rho$, donc $\rho\nabla^i\mu = (\lambda+\mu)\nabla^i\rho$. On en déduit

$$(\lambda+\mu)(\nabla^i\rho)u_i + (\lambda+\mu)\rho\nabla^i u_i = 0$$

et finalement, puisque $\lambda + \mu > 0$:

$$\boxed{\nabla^i(\rho u_i) = 0}$$

ce qui est, là encore, la loi de conservation de la masse.

Remarque : dans le cas d'un fluide parfait, les courbes du fluide ne sont pas nécessairement des images de géodésiques.

Enfin, en revenant aux équations (2) et (3), on déduit "l'équation d'un fluide parfait" :

$$(\mu+\lambda)u_i\nabla^i u_j + (g_{ij} + u_i u_j)\nabla^i\lambda = 0$$

2.5 La notion de causalité en relativité générale : que doit savoir un observateur pour prédire ce qui va se passer ?

On considère un observateur dans l'espacetemps de la relativité générale. Supposons que cet observateur ait pu enregistrer toutes les données physiques d'un ouvert de l'espacetemps. Si cet ouvert admet une hypersurface de Cauchy, on sait que, si les théorèmes de Cauchy s'appliquent pour ces données physiques, alors l'observateur peut connaitre toutes les données physiques dans le domaine de dépendance de cette hypersurface de Cauchy (qui contient l'ouvert considéré), donc connaitre éventuellement une partie de son avenir. Mais l'étude de ces théorèmes montre qu'en fait, pour avoir exactement toutes les données physiques sur une telle hypersurface de Cauchy, l'observateur ne peut être qu'en "limite temporelle" du domaine futur de dépendance, et ne peut donc prédire son avenir qu'en *conjecturant* les données physiques sur une hypersurface plus grande. On y reviendra plus loin. On a supposé ici que l'observateur avait enregistré toutes les données physiques sur un un ouvert de l'espacetemps contenant une hypersurface de Cauchy. Il aurait suffit qu'il les

connaisse sur cette hypersurface, mais les données "restreintes" à cette hypersurface sont techniquement difficiles à définir (voir [H-E] ou [C-B]). Pour ce qui nous intéresse ici, il est bien plus pratique de considérer que les "conditions initiales" sont en fait des données sur *un ouvert* de (M, g), c'est d'ailleurs comme ceci qu'elles sont obtenues dans la réalité. La "minimalité" des conditions initiales n'est pas ce qui nous intéresse ici. Si l'on considère maintenant que les objets physiques ne sont que des données géométriques de la variété ł(des caractéristiques de la courbure), alors le problème semble se poser de la manière suivante : dans quels cas la "connaissance" du tenseur g sur un ouvert Ω de M, détermine-t-elle complètement g sur tout le domaine de dépendance de Ω ? La question posée comme cela n'est en fait pas très claire, car Ω est supposé être un ouvert d'une variété ł(M, g) où g est déjà connue sur M tout entier car cela est nécessaire pour définir le domaine de dépendance de Ω. Une manière plus précise de poser la question serait : soit (Ω, g) une variété Lorentzienne, quelles que soient les variétés Lorentziennes $(M, \tilde{g})$ inextensibles, (les espacetemps possibles), dans lesquelles (Ω, g) se plonge isométriquement, les domaines de dépendance de Ω sont-ils obligatoirement isométriques entre eux ? En fait, pour poser clairement le problème, il n'est pas nécessaire de plonger systématiquement (Ω, g) dans une variété inextensible. La section suivante va exposer précisément les définitions et les résultats obtenus en réponse à ce type de questions ; ceux-ci seront présentés sous forme de *théorèmes de rigidité.* Ce sont des théorèmes purement mathématiques sur les variétés Lorentziennes (il n'y en a pas d'équivalent pour les variétés Riemanniennes, car la notion fondamentale sous-jacente est celle de "domaine de dépendance" propre aux variétés Lorentziennes). L'interprétation physique sera donnée ensuite.

2.6 Théorèmes de rigidité pour les variétés Lorentziennes

Les définitions suivantes sont valables sur des variétés Lorentziennes de dimension $n \geqslant 4$.

Définition 1. *Soit* (Ω, g) *une variété Lorentzienne, ou un domaine d'une telle variété. Définir un* type *sur* (Ω, g), *c'est définir des propriétés* $P(g)$ *qui ne dépendent que de la géométrie de* (Ω, g), *c'est à dire invariantes par toute isométrie sur* Ω : $P(\varphi^* g) = P(g)$ *pour toute isométrie* φ *sur* Ω. *Il est important de remarquer qu'une isométrie est aussi un homéomorphisme et un difféomorphisme, donc que* $P(g)$ *dépend aussi de la structure topologique et différentielle de* Ω.

Dans le cas des variétés de dimension 4 qui nous intéresse dans cette section, on considère les types décrits précédemment, et pour séparer les domaines de l'espacetemps dans lesquels il n'y a pas d'électromagnétisme de ceux où il y en a, on dira qu'un domaine Ω est :
-de type I si $\forall x \in \Omega$, G_x est de type 0 ou 1,
-de type II si $\forall x \in \Omega$, G_x est de type 2, 3 ou 4.

On écrira I ou II ou 1,2,... au lieu de P(g) dans ces cas. Pour faire court, on notera X un type quelconque.

Définition 2. *Un domaine* causal (Ω, S, g) *est la donnée d'une variété* (Ω, g) *orienté en temps et d'une hypersurface de genre espace* S *de Cauchy pour* (Ω, g) ; S *est supposée de classe* C^2. *Un domaine causal de type* $P(g)$ *est un domaine causal* (Ω, S, g) *où* (Ω, g) *est de type* $P(g)$. *On notera* (Ω, g) *est un* $DC(P(g))$.

Remarque : Dans ce paragraphe, une isométrie d'une variété lorentzienne (Ω_1, g_1) dans une variété lorentzienne (Ω_2, g_2) est définie juste comme une application lisse $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ telle que $\varphi^*(g_2) = g_1$ (on pourra aussi considérer qu'elle conserve l'orientation en temps).

Définition 3. *Soit* (Ω_1, S_1) *et* (Ω_2, S_2) *deux* $DC(X)$*. Une isométrie* Θ *de* (Ω_1, S_1) *dans* (Ω_2, S_2) *est une isométrie surjective de* Ω_1 *dans* Ω_2 *telle que* $\Theta(S_1) = S_2$*.*

Définition 4. *Une X-extension d'un* $DC(X)$ (Ω, S) *est un couple* (Θ_1, Ω_1) *où* Θ_1 *est une isométrie injective (non nécessairement surjective) de* Ω *dans* Ω_1 *telle que* $(\Theta_1(S), \Omega_1)$ *soit un* $DC(X)$*.*

Définition 5. *Soit* (Θ_1, Ω_1) *une X-extension de* (Ω, S)*. Une* X*-surextension de* (Θ_1, Ω_1) *est une* X*-extension* (Θ_2, Ω_2) *de* (S, Ω) *telle qu'il existe une isométrie injective* ψ *de* Ω_1 *dans* Ω_2 *qui vérifie sur* S *:* $\psi \circ \Theta_1 = \Theta_2$*. Alors, d'après la proposition suivante,* $\psi \circ \Theta_1 = \Theta_2$ *sur* Ω*.*

Proposition 1. *Soient* Ω *et* Ω_1 *deux variétés lorentziennes,* S *est une hypersurface de Cauchy de* Ω*,* φ_1 *et* φ_2 *deux isométries injectives de* Ω *dans* Ω_1*. Alors, si* $(\varphi_1)_{|S} = (\varphi_2)_{|S}$*, on a* $\varphi_1 = \varphi_2$*.*

Démonstration : Soit $x \in \Omega$. Il existe un unique $x_S \in S$ tel que l'unique courbe de géodésique, de genre temps ou isotrope, joignant x à x_S soit $g\perp$ à S au point x_S, (c'est la courbe de temps propre maximum entre x et S, pour les courbes de genre temps ou isotropes, voir [H-E]). Soit C cette géodésique (bien paramètrée), alors puisque ϕ_1 et ϕ_2 sont des plongements isométriques, $\phi_1 \circ C$ et $\phi_1 \circ C$ sont des géodésiques orthogonales à $\phi_1(S)$, resp. à $\phi_2(S)$, au point $\phi_1(x_S)$, resp. $\phi_2(x_S)$. Comme $x_S \in S$, $\phi_1(x_S) = \phi_2(x_S)$ et puisqu'il existe une unique géodésique orthogonale à $\phi_1(S) = \phi_2(S)$ au point $\phi_1(x_S)$, on a $\phi_1 \circ C = \phi_1 \circ C$ sur $[0, t_0]$, donc $\phi_1 \circ C(t_0) = \phi_1 \circ C(t_0)$, c'est-à-dire $\phi_1(x) = \phi_2(x)$.

Définition 6. *Une isométrie* φ *d'une* X*-extension* (Θ_1, Ω_1) *de* (Ω, S) *dans une* X*-extension* (Θ_2, Ω_2) *de* (Ω, S) *est une isométrie bijective de* Ω_1 *dans* Ω_2 *telle que : sur S,* $\varphi \circ \Theta_1 = \Theta_2$*. (Alors* $\varphi \circ \Theta_1 = \Theta_2$ *sur* Ω*).*

Définition 7. *Soit* (Θ_1, Ω_1) *une* X*-extension de* (Ω, S)*.* (Θ_1, Ω_1) *est une* X*-extension maximale de* (S, Ω) *si toute* X*-surextension de* (Θ_1, Ω_1) *est isométrique à* (Θ_1, Ω_1)*.*

Théorème 1. *Soit* (S, Ω) *un* $DC(X)$*. Il existe toujours une* X*-extension maximale de* (S, Ω)*. (Il peut en exister plusieurs non isométriques entre elles.)*

Démonstration : Difficile, nécessite d'utiliser l'axiome de Zorn. Voir Hawking-Ellis.

Théorème 2. *(Rigidité pour les* $DC(X)$ *lorsque X=0,1 ou I). Soit* (S, Ω) *un domaine causal de type X =0,1 ou I. Les X-extensions maximales de* (S, Ω) *sont isométriques entre elles.*

Démonstration. On applique les résultats d'unicité des théorèmes de Cauchy en relativité générale avec les conditions initiales sur S traduites en partant du fait que le domaine est du type 0,1 ou I. (Voir Choquet-Bruhat et éventuellement des théorèmes d'unicité à montrer).

Théorème 3. *(Conjecture ?). (Non-rigidité pour les DC(X) lorsque X=2,3,4 ou II.) Soit* (S, Ω) *un domaine causal de type X=2,3,4 ou II tel que* (Id, Ω) *ne soit pas X-maximale (Id est l'application identité sur* Ω*.) Il existe une infinité d'extensions* X*-maximales de* (S, Ω) *non isométriques entre elles.*

Remarque : Si type X $\Rightarrow$ type Y, (par exemple, vues les définitions, type 0 $\Rightarrow$ type 1, type 1 $\Rightarrow$ type I, type 2 $\Rightarrow$ type II, etc...), alors une X-extension (Θ_1, Ω_1) de (Ω, S) est aussi une Y-extension de (S, Ω). On peut donc, pour une X-extension (Θ_1, Ω_1) de (Ω, S) donnée, considérer les X-surextensions et les Y-surextensions de (Θ_1, Ω_1) qui ne sont pas à priori les mêmes (à isométries près). On a cependant le résultat suivant (Hawking-Ellis, lemme 4.3.1), ici traduit dans notre langage (dont la démonstration n'est pas triviale).

Théorème 4. *Soit* (S, Ω) *un* $DC(0)$*, (Ricc=0). Si type 0* $\Rightarrow$ *type X, alors toute X-extension est une 0-extension. (Les types X considérés doivent respecter la condition "d'énergie dominante").*

Physiquement, cela signifie que si dans un ouvert Ω (admettant une hypersurface de Cauchy), il n'y a ni fluide ni électromagnétisme (un $DC(0)$), il ne pourra pas y en avoir dans toute X-extension. On peut dire grossièrement que, puisque l'on suppose la condition d'énergie dominante, aucun objet physique ne peut aller plus vite que la lumière et ne peut donc "s'introduire" dans un domaine d'expansion de Ω. On peut d'ailleurs supposer que ce genre de résultat s'étend à d'autres types que 0. Par exemple, si dans Ω il n'y a qu'un fluide sans électromagnétisme, peut-il y avoir de l'électromagnétisme dans un domaine d'expansion de Ω ? (autrement dit, si type 1 $\Rightarrow$ type X, alors toute X-extension est-elle une 1-extension ?)

2.7 Qu'est-ce qu'une bonne théorie physique.

Dans le sens pratique commun, une bonne théorie physique est celle qui permet, à partir de la connaissance de certaines grandeurs physiques à un instant donné, de prédire l'évolution dans le temps de ces mêmes grandeurs, avec une précision "suffisantes". Dans le cadre de la relativité générale, si l'on ne considère que les grandeurs physiques définies avec la géométrie de la variété Lorentzienne, on peut traduire ceci en disant qu'une bonne théorie physique est celle qui permet à un observateur qui connait, à un instant t_0 de son temps propre, le tenseur g sur un $DC(X)$ (S, Ω), d'en déduire sans ambiguïté (à isométrie près) g sur un domaine d'expansion maximal de (S, Ω) et donc de prédire l'évolution des grandeurs physiques définies à partir de g sur l'intervalle de son temps propre correspondant à la partie de sa courbe incluse (à partir de $C(t_0)$) dans le domaine d'expansion. Il n'y aura aucune ambiguïté qu'à condition, évidemment, que tous les domaines d'expansion de (S, Ω) soient isométriques entre eux. C'est le cas lorsque l'on peut appliquer le théorème 2, c'est à dire si (S, Ω) est de type I, autrement dit si Ω ne contient qu'un fluide ou rien (pas d'électromagnétisme). Par contre, si (S, Ω) est de type II, le théorème 3 nous dit que, même si l'observateur connait g sur Ω, il ne pourra strictement rien prédire (du moins il aura le choix entre une infinité de possibilités) sur l'évolution des grandeurs physiques définies à partir de g, (ici, celles définies pour l'électromagnétisme pour les types 2,3,4). L'électromagnétisme présenté uniquement à partir des grandeurs géométriques de la variété łest donc obligatoirement insufisant pour une "bonne théorie physique".

Remarque : Si l'on introduit l'électromagnétisme en relativité générale en "rajoutant" dans la variété łune 2-forme exacte et en imposant le tenseur d'énergie-impulsion correspondant aux équations de Maxwell (présentation classique), on obtient une "bonne théorie physique", car on peut appliquer le théorème de Cauchy correspondant aux données initiales de cet électromagnétisme classique.

On termine cette section en précisant, encore une fois, qu'en relativité générale , un observateur ne peut théoriquement connaître toutes les données physiques sur un domaine causal (S, Ω) que si son temps propre est en "limite" d'un domaine d'expansion de (S, Ω). Toute prédiction sur l'évolution des grandeurs physiques ne peut donc être qu'approximative. L'approximation est en générale faite de la manière suivante : les données physiques étant connues sur (S, Ω) à l'instant t_0 pour l'observateur, celui-ci conjecture "par extension" les données physiques sur un domaine causal (S', Ω') qui contient strictement (S, Ω), ($S \subset S'$ et $\Omega \subset \Omega'$). Il peut alors prédire, via cette extension, l'évolution sur un intervalle de temps tel que sa courbe reste dans le domaine d'expansion de (S', Ω'), dans le cas où il est unique à isomorphisme près. Comme exemple, on peut considérer un observateur qui constate à un instant t_0 qu'un domaine causal (S, Ω) est de type I et est à symétrie sphérique en espace, par exemple une planète et du vide autour. Il conjecture alors qu'un domaine strictement plus grand (S', Ω') est encore à symétrie sphérique. Il peut alors appliquer les résultats connus pour la géométrie de Schwarzchild et calculer les géodésiques de (S', Ω') et prédire par exemple le mouvement de satellites autour de cette planète, mais en faisant dans ce cas une *deuxième* approximation qui consiste à dire que les satellites sont négligeables relativement à la symétrie sphérique. Comme les satellites peuvent être considérés comme les courbes d'un fluide v-parfait (s'il n'y a pas d'interaction entre eux ou avec la planète), leurs courbes sont les géodésiques calculées précédemment. Cette deuxième approximation est un procédé habituel (utilisé aussi en physique classique) et est utilisée dans le seul but de simplifier (considérablement) les calculs. En revanche, la première approximation est une obligation théorique.

3 Les trois concepts fondamentaux : types, théorèmes de Cauchy, rigidité.

3.1 Définitions

Revenons sur ce qui apparaît comme l'idée directrice dans ce qui précède.

L'univers, ou l'espacetemps, est une variété Lorentzienne, que nous ne supposons plus forcément de dimension 4, munie donc d'une métrique de signature $(-, +, +, ..., +)$. On ne met pas de "matière" ou de "champs" dans l'espace-temps, la matière et les champs ne sont que des domaines (i.e. des ouverts connexes) de la variété où la géométrie possède des caractéristiques particulières. Les équations de la physique ne sont que la traduction de théorèmes, ou de formules, de géométrie Riemannienne, comme par exemple la seconde identité de Bianchi, le calcul de la divergence d'un tenseur en fonction de la courbure, etc...

Concernant l'aspect déterministe, faire de la physique c'est pouvoir prédire le résultat d'expériences. Mathématiquement, cela se traduit par une propriété de rigidité du domaine de la variété que l'on étudie, domaine muni donc d'un

type particulier, et obtenir une "bonne théorie physique" sur ce domaine, c'est démontrer un théorème de Cauchy pour le type de ce domaine.

Nous posons donc les trois définitions fondamentales suivantes : Nous considérons maintenant des variétés Lorentziennes (M, g) ou (Ω, g) de dimension $n \geqslant 4$.

Définition 8. *Soit* (Ω, g) *une variété Lorentzienne, ou un domaine d'une telle variété. Définir un* type *sur* (Ω, g)*, c'est définir des propriétés* $P(g)$ *qui ne dépendent que de la géométrie de* (Ω, g)*, c'est à dire invariantes par toute isométrie sur* Ω *:* $P(\varphi^* g) = P(g)$ *pour toute isométrie* φ *sur* Ω*. Il est important de remarquer qu'une isométrie est aussi un homéomorphisme et un difféomorphisme, donc que* $P(g)$ *dépend aussi de la structure topologique et différentielle de* Ω*.*

Rappel : un domaine *causal* (Ω, S, g) est la donnée d'une variété (Ω, g) orientée en temps et d'une hypersurface de genre espace S de Cauchy pour (Ω, g). Un domaine causal de type $P(g)$ est un domaine causal (Ω, S, g) où (Ω, g) est de type $P(g)$. On reverra aussi les définitions donnés en 2.6 sur les extensions des domaines causals.

Définition 9. *Soit* (Ω, S, g) *un domaine causal de type* $P(g)$*. On dira que* $(\Omega, S, g, P(g))$ *est* rigide*, ou* a la propriété de Cauchy*, ou encore est* déterministe*, si la* $P(g)$*-extension maximale de* $(\Omega, S, g, P(g))$ *est unique à isométrie près.*

Définition 10. *Démontrer un théorème de Cauchy pour un domaine causal* (Ω, S, g) *de type* $P(g)$*, c'est montrer que* $(\Omega, S, g, P(g))$ *est rigide. C'est là qu'on fait des mathématiques (difficiles) ; voir tous les théorèmes du Choquet-Bruhat.*

Précisons heuristiquement ce qu'est un type. Une théorie physique c'est une modélisation d'une région de l'espacetemps et de son fonctionnement. Nous traduisons cela en disant que choisir un type sur un domaine de l'espacetemps, c'est choisir un modéle physique et/ou un dispositif expérimental isolé ; par exemple un fluide parfait est un domaine de type 1, un fluide chargé, un domaine de type 2, etc... Par ailleurs, négliger en physique, c'est poser des hypothèses géométriques supplémentaires, par exemple des symétries. Obtenir une "bonne" théorie physique (i.e déterministe), c'est démontrer un théorème de Cauchy pour le type choisi comme modèle d'une situation physique. A noter qu'en théorie quantique, on peut avoir une bonne théorie, i.e un bon choix de type, sans forcément avoir des théorèmes de rigidité (à suivre)...

4 L'espacetemps de dimension 5.

La seule donnée d'une variété ł(M, g) de dimension 4 ne suffit donc pas pour géométriser tous les objets de la physique "classique", puisque l'on n'obtient pas complètement l'électromagnétisme. Que peut-on alors tenter ? Si on veut pouvoir obtenir *géométriquement* plus d'objets, il faut enrichir la géométrie. La méthode la plus célèbre historiquement, est celle due à Nordström, Kaluza et Klein : elle consiste à augmenter la dimension de la variété espacetemps.

Nous verrons qu'à partir de cette idée, la simple suppression d'une hypothèse faite dans tous les articles physiques sur ce sujet, hypothèse *injustifiée* lorsque

l'on adopte notre point de vue, permet effectivement d'unifier dans un même cadre *géométrique* la gravitation et l'électromagnétisme.

4.1 "Petite" dimension.

Comment, donc, modéliser la notion de "petite" dimension supplémentaire ? La méthode originellement proposé par Kaluza et Klein est de faire appel à la structure de fibré au-dessus d'une variété quotient, interprétée comme l'espace-temps que nous percevons. Nous verrons que la structure de fibré principal en cercle, structure de la théorie de Kaluza-Klein, permet d'obtenir un univers où se réalise parfaitement la gravitation et l'électromagnétisme, une fois adopté notre point de vue, tel que nous le présenterons en section 4.3. Cette structure nous parait cependant très rigide (trop artificiel pour décrire un univers physique ?) La notion de fibré modélise bien la notion de "direction". Mais la projection du fibré est une donnée assez forte, elle-même assez rigide. Elle correspond bien à la notion de symétrie souvent exigé en physique.Néanmoins, nous avons présenté dans l'introduction notre point de vue selon lequel la relativité générale avait pour but d'abandonner le plus possible les principes ad hoc. Nous cherchons donc une extension minimale du modèle de la relativité générale .

L'idée minimale que nous proposons est la suivante :

Hypothèse 1 : L'espacetemps est modélisé par une variété ł(M, g), de dimension 5, telle qu'il existe un $\epsilon > 0$ de sorte qu'en chaque point $x \in M$, il existe un unique chemin fermé en x, non homotope à un point, et de longueur inférieure à ϵ. En fait, l'hypothèse de l'existence d'un ϵ contraignant la longueur n'est pas nécessaire mathématiquement mais donne une modélisation de la notion de "petite" dimension.

Cette idée "minimale" est cependant sans doute difficilement exploitable mathématiquement et même probablement physiquement. Il est raisonnable, pour être plus proche d'une notion de dimension supplémentaire, de demander que cette petite boucle en chaque point soit une sous-variété totalement géodésique. On remplace donc l'hypothèse 1 par la suivante :

Hypothèse 2 : L'espacetemps est modélisé par une variété ł(M, g), de dimension 5, telle qu'il existe un $\epsilon > 0$ de sorte qu' en chaque point $x \in M$, il passe une unique sous-variété S_x de dimension 1 et de genre espace, totalement géodésique, compacte, non homotope à un point, et de diamètre inférieure à ϵ pour la métrique induite sur S_x par g. On suppose de plus que le champ de sous-variétés $x \mapsto S_x$ est différentiable (C^k), c'est à dire que pour tout $x \in M$, il existe un voisinage V_x et un champ de vecteurs différentiable (C^k) Y sur V_x tel que $\forall p \in V_x$, Y_p soit une base de T_pS_p (c'est à dire ici $Y_p \neq 0$).

Chaque variété S_x (supposée connexe) est ainsi difféomorphe à un cercle et est l'image d'une géodésique de M. Mathématiquement, on a définit un *feuilletage* de M par les sous-variétés S_x. L'avantage de l'hypothèse 2 est qu'elle produit naturellement un champ de vecteurs normalisé, unique à orientation près, identifiable au potentiel électromagnétique.

4.2 Aspects Mathématiques

Nous nous plaçons à partir de maintenant dans le cadre de l'hypothèse 2, en rajoutant que la variété, ou du moins le domaine que nous observons, est orientée en temps.

Hypothèse 2 : L'espacetemps est modélisé par une variété ł(M, g) orientée en temps, de dimension 5, telle qu'il existe un $\epsilon > 0$ de sorte qu' en chaque point $x \in M$, il passe une unique sous-variété (connexe) S_x de dimension 1 et de genre espace, totalement géodésique, compacte, non homotope à un point, et de diamètre inférieur à ϵ pour la métrique induite sur S_x par g. On suppose de plus que le champ de sous-variétés $x \mapsto S_x$ est différentiable.

Définition 11. *Pour tout $x \in M$, choisissant une orientation sur S_x, il existe un voisinage V_x de x dans M sur lequel on peut définir un champ de vecteurs Y, en posant qu'en chaque point $p \in V_x$, Y_p est le vecteur tangent en p à S_p tel que $g(Y_p, Y_p) = 1$ et correspondant à l'orientation choisie. On définit alors une 1-forme Y^* associée à Y par g, ($Y^* = Y^b = Y_i$ si $Y = Y^i$). Ensuite, on définit l'espace horizontal H_p pour $p \in V_x$ comme étant le sous-espace de $T_p(M)$ g-orthogonal à Y_p. Enfin, on note $F = d(Y^*)$ la différentielle de Y^*.*

Attention : il n'est pas toujours possible, compte tenu des deux choix possibles en chaque point, de définir un champ Y continu sur tout M. Ce choix n'a aucune incidence sur les résultats qui suivent.

Faisons quelques remarques.
Si $Y = Y^i \partial_i$ dans une carte, $Y^* = Y_i dx^i$. De plus, la connexion étant sans torsion, on a $F = dY^* = \nabla_i Y_j - \nabla_j Y_i$. Nous noterons, pour tout x de M, $H_x = (Y_x)^{g\perp}$, l'espace horizontal en x. Ayant choisi un modèle plus simple que celui de fibré principal de la théorie habituelle, nous faisons intervenir un tenseur mesurant le fait que Y n'engendre pas un champ de Killing :

Définition 12. *On appelle facteur K, ou défaut de Killing, ou tout autre nom qui en jette, le tenseur suivant :*

$$K = K_{ij} = \nabla_i Y_j + \nabla_j Y_i$$

Si $K = 0$, alors le flot engendré par Y est un champ d'isométries, et il est alors facile de faire de M un fibré principal en cercle. On retrouve alors le cadre de la théorie de Kaluza-Klein classique ; nous le verrons comme cas particulier en section 5.

Nous avons placé là tout le cadre mathématique. Reconnaissez qu'il est léger. Nous allons voir qu'il permet néanmoins de trouver des "équations" pour la dynamique de l'univers. Ces équations, obtenues uniquement à partir de résultat de géométrie différentielle (Riemannienne), donneront sous certaines hypothèses géométriques supplémentaires, correspondant à des approximations "physiques", exactement les équations d'Einstein-Maxwell-Lorentz.

4.3 C'est pas Ricci qui est nul.

L'hypothèse 2 produit donc naturellement un champ de vecteurs, et on peut à partir de ce champ définir une 2-forme F que l'on identifiera à la 2-forme de l' électromagnétisme. C'est ici que nous nous écartons de manière fondamentale des tentatives vues dans les articles de physiques dont nous avons connaissance. En effet il y est toujours considéré que la matière de la dimension 4 doit apparaitre à partir d'un espace de dimension 5 vide de matière, donc de courbure de Ricci nulle. Malheureusement, dans le cadre de la théorie de Kaluza-Klein, les hypothèses généralement posées impliquent que la pseudo-norme $|F|_g = 0$ ce

qui contredit certaines exigences de l' électromagnétisme ! (voir [Bourguignon]). Donc on ne retrouve rien du tout... Or, d'après notre vision, il n'y a aucune raison de considérer que la courbure de Ricci de M est nulle. Nous pensons que cette exigence des physiciens est liée à l'habitude qu'il y a encore malgré tout à considérer que l'on " met" de la matière dans l'espace-temps. En effet, l'argument que l'on trouve dans les articles de physique est que si l'on veut retrouver de la matière à partir de la géométrie, elle doit apparaitre à partir d'un "vide", qui s'interprète ensuite par l'équation d'Einstein comme voulant dire "Ricci nul"' ; il est rajouté comme argument que l'on ne "gagnerait" rien à mettre de la courbure en dimension 5, car cela reviendrait à y mettre de la matière ! (cf [7]). Autrement dit on continue à garder l'idée que l'on "met" de la matière dans l'espace-temps et que la géométrie vient ensuite ! Dans notre vision, il n'y a que de la géométrie, donc éventuellement de la courbure, la "matière" n'étant qu'une perception "humaine" de cette géométrie.

Nous verrons par exemple qu'une fois admis cette vision, les formules, pourtant bien connues, de la théorie de Kaluza-Klein redonnent bien la gravité et l'électromagnétisme de manière purement géométrique. Ce qui coinçait, car donnant une 2-forme électromagnétique de pseudo-norme nulle, était de considérer Ricci nulle. Sans cette restriction qui nous semble injustifiée, et en utilisant la notion de type, nous verrons que nous obtenons bien une vision purement géométrique de la gravitoélectromagnétisme.

Dans la section suivante, partant de l'hypothèse 2, nous obtiendrons des équations très générales donnant la "dynamique" d'un espacetemps de dimension 5, telle que vue par une famille d'observateurs donnés. Si ces observateurs sont liés à un "fluide" de matière, nous montrerons que, si ces observateurs ne "perçoivent" que 4 dimensions, c'est à dire si l'on considère que les mesures qu'ils font le long des géodésiques représentant la (petite) cinquième dimension sont négligeables, alors ces équations redonnent les équations classiques de la gravitation et de l'électromagnétisme.

4.4 Equations de la dynamique de l'Univers.

4.4.1 Famille d'observateurs.

On suppose donné un champ de vecteurs X_0 sur un ouvert de M où Y est défini, de genre temps, de norme $g(X_0, X_0) = -1$, et orthogonal en tout point de M à Y, $(X_0)_x \perp_g Y_x$. Ce champ de vecteurs représente une famille d'observateurs.

On rappelle que $H_x = Y_x^\perp$. On définit un sous-espace H'_x de H_x par

$$H'_x =< X_0(x), Y_x >^\perp .$$

H'_x peut s'interpréter comme l'espace perçu par $X_0(x)$.

Notons $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} S g_{ij}$ la courbure d'Einstein. On note ${}^eG = {}^eG_i{}^j$ le champ d'endomorphismes associé. On note ${}^eG_H$ le champ d'endomorphismes sur les espaces horizontaux H_x défini par ${}^eG_H = pr_H \circ ({}^eG_{|H})$, où pour $x \in M$, $(pr_H)_{|x}$ est la projection orthogonal de T_xM sur H_x.

On définit un champ d'endomorphismes ${}^eG'$ par : ${}^eG'(X_0) = {}^eG'(Y) = 0$ (en tout point x), et ${}^eG'(X) = {}^eG_H(X)$ si $X \in H'$.

Pour écrire les matrices de G et ${}^eG$, on complète alors X_0 et Y par 3 champs de vecteurs X_1, X_2 et X_3, non canoniques, de sorte que (X_0, X_1, X_2, X_3, Y)

forme en tout point $x \in M$ une base g-orthonormée de T_xM. Alors H_x a pour base (X_0, X_1, X_2, X_3), et $H'_x =< X_1, X_2, X_3 >$.

Enfin, nous définissons deux champs de vecteurs Z et Z' par

$$Z = pr_{H'} \circ {}^eG(Y)$$

et

$$Z' = pr_{H'} \circ {}^eG(X_0).$$

On écrit :

$${}^eG(X_0) = -\mu X_0 + Z' - eY$$

et, puisque G est symétrique,

$${}^eG(Y) = eX_0 + Z + \gamma Y$$

où μ et e sont des fonctions sur M. On écrira aussi $Z = \sum_1^3 Z^i X_i$ et $Z' = \sum_1^3 Z'^i X_i$.

Dans la base (X_0, X_1, X_2, X_3, Y) de T_xM, les matrices de G et ${}^eG$ s'écrivent :

$$G = \begin{pmatrix} \mu & \begin{pmatrix} Z'^1 & Z'^2 & Z'^3 \end{pmatrix} & e \\ \begin{pmatrix} Z'^1 \\ Z'^2 \\ Z'^3 \end{pmatrix} & (G')_{|H'} & \begin{pmatrix} Z^1 \\ Z^2 \\ Z^3 \end{pmatrix} \\ e & \begin{pmatrix} Z^1 & Z^2 & Z^3 \end{pmatrix} & \gamma \end{pmatrix}$$

et

$${}^eG = \begin{pmatrix} -\mu & \begin{pmatrix} Z'^1 & Z'^2 & Z'^3 \end{pmatrix} & e \\ \begin{pmatrix} Z'^1 \\ Z'^2 \\ Z'^3 \end{pmatrix} & ({}^eG')_{|H'} & \begin{pmatrix} Z^1 \\ Z^2 \\ Z^3 \end{pmatrix} \\ -e & \begin{pmatrix} Z^1 & Z^2 & Z^3 \end{pmatrix} & \gamma \end{pmatrix}$$

Sous forme tensorielle, et ne faisant intervenir que les champs naturels en plus de X_0, on peut écrire, en notant encore $G = G^{ij}$ le tenseur 2-fois contravariant associé à G_{ij} par g :

$$\boxed{\begin{aligned} G =& \mu X_0 \otimes X_0 - e(X_0 \otimes Y + Y \otimes X_0) + \gamma Y \otimes Y + G' \\ &+ (Z \otimes Y + Y \otimes Z) + (Z' \otimes X_0 + X_0 \otimes Z') \end{aligned}} \tag{4}$$

Notons bien qu'étant donné X_0, les fonctions μ, e et γ sont canoniques car :
$-\mu = g({}^eG(X_0), X_0)$, $e = g({}^eG(Y), X_0)$, et $\gamma = g({}^eG(Y), Y)$.

Regroupons ici quelques propriétés de la base g-orthonormée $(X_0, X_1, X_2, X_3, Y)_x$ de T_xM.

Proposition 2. *On note (X, Z) le produit scalaire $g(X, Z)$.*

1. $D_Y Y = 0$ *car Y est tangent aux géodésiques.*
2. $\forall p$, $(D_{X_p} Y, Y) = 0$ *car* $(Y, Y) \equiv 1$.
3. $(D_Y X_p, Y) = 0$ *car* $(X_p, Y) \equiv 0$ *et donc* $D_Y(X_p, Y) = 0 = (D_Y X_p, Y) + (X_p, D_Y Y)$.
4. $(D_Y X_p, X_p) = 0$ *car* $(D_Y X_p, X_q) = -(X_p, D_Y X_q)$.

5. *de même :* $(D_{X_r}X_p, X_p) = 0$
6. $D_{X_0}Y = 1/2({}^eF(X_0) + {}^eK(X_0))$. *(voir plus loin)*

On a noté $div_g T = cDT$ et $d^*T = -cDT$ pour un tenseur T 2-fois contravariant, où c est la contraction ; cette définition est sans ambiguïté si T est symétrique (par exemple G^{ij}, ou R^{ij}) , sinon il faut préciser sur quel indice on contracte.

Nous allons maintenant donner trois équations qui selon nous s'apparentent à des équations de la dynamique de l'espacetemps telle que vue par la famille d'observateurs X_0.

Tout d'abord, par définition, $F = dY^*$, et donc $dF = 0$. Cela s'apparente à la première équation de Maxwell.

Nous calculons maintenant $div_g F$ pour trouver l'équivalent de la seconde équation de Maxwell.

Nous noterons ${}^eF$ le tenseur ${}^eF = \nabla_i Y^j - \nabla^j Y_i$; c'est, en chaque point x, l'endomorphisme de T_xM associé à $dY^* = \nabla_i Y_j - \nabla_j Y_i$. Nous noterons de même ${}^eK = K_i{}^j$ l'endomorphisme associé à K. Nous allons calculer en fait $div_g({}^eF)$.

${}^eF = \nabla_i Y^j - \nabla^j Y_i = 2\nabla_i Y^j - K_i{}^j$.

$$\begin{aligned} div_g({}^eF) &= \nabla^i(2\nabla_i Y^j - K_i{}^j) \\ &= 2\nabla^i\nabla_i Y^j - \nabla^i K_i{}^j \end{aligned}$$

or $\nabla_i Y^j = K_i{}^j - \nabla^j Y_i$. Donc $div_g({}^eF) = -2\nabla^i\nabla^j Y_i + \nabla^i K_i{}^j$

Maintenant, $\nabla^i\nabla^j Y_i = \nabla^j\nabla^i Y_i + R^j_l Y^l$. Donc :

$div_g({}^eF) = -2\nabla^j\nabla^i Y_i - 2R^j_l Y^l - \nabla^i K_i{}^j$.

Ensuite, $R^j_l = G^j_l + 1/2 S g^j_l$, et

$$G^j_l Y^l = eX^j_0 + \gamma Y^j + G'^j_l Y^l + Z^j$$

or $G'^j_l Y^l = {}^eG'(Y) = 0$ par définition, et $G^j_l Y^l = {}^eG(Y) = eX_0 + \gamma Y + Z$. En notant que $g^j_l = id$, on obtient l'importante relation :

$$\boxed{R^j_l Y^l = eX_0 + \gamma Y + Z + 1/2 S_g.Y}$$

$\nabla^j\nabla^i Y_i = \nabla^j(divY) = grad(divY)$, et $\nabla^i K^j_i = div_g K$. On obtient alors, la "seconde équation de Maxwell" :

$$\boxed{-div_g({}^eF) = 2e.X_0 + 2[grad(div_g Y) + div_g K + Z] + (2\gamma + S_g).Y} \qquad (5)$$

Remarque : $div_g Y = \frac{1}{2} tr_g K$. En effet, $tr_g K = 2\nabla^i Y_i$. Par conséquent, si $K = 0$, alors $div_g Y = 0$.

Nous allons maintenant appliquer le seconde identité de Bianchi, $div_g G := cD(G) := \nabla^i G_{ij} = 0$, et ainsi obtenir une équation analogue à l'équation d'Einstein-Lorentz, (mouvement de particules chargées dans un champ gravitationnel et électromagnétique.)

En utilisant la proposition 2, on trouve à partir de l'équation (4) :

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla_i G^{ij} =&(D_{X_0}\mu)X_0 + \mu D_{X_0}X_0 + \mu(div_g X_0)X_0\\ &- (D_{X_0}e)Y - (D_Y e)X_0\\ &- e[(div_g X_0)Y + D_{X_0}Y + D_Y X_0 + (div_g Y)X_0]\\ &+ (\nabla_i (G')^{ij}) + (D_Y\gamma)Y + \gamma(div_g Y)Y\\ &+ D_Z Y + D_Y Z + (div_g Z)Y + (div_g Y)Z\\ &+ D_{Z'}X_0 + D_{X_0}Z' + (div_g Z')X_0 + (div_g X_0)Z'\\ &= 0\end{aligned}} \qquad (6)$$

Interprétant $\nabla_i G^{ij}$ comme un vecteur, on projette cette relation sur X_0, Y, et H', c'est à dire qu'on écrit successivement : $g(\nabla_i G^{ij}, X_0) = 0$, $g(\nabla_i G^{ij}, Y) = 0$, et $pr_{H'}(\nabla_i G^{ij}) = 0$. On obtient, en notant encore (X, Z) le produit scalaire $g(X, Z)$:

$$\boxed{\begin{aligned}g(\nabla_i G^{ij}, X_0) =&- div_g(\mu X_0) - e(X_0, D_{X_0}Y) + e.div_g Y\\ &+ (X_0, \nabla_i (G')^{ij}) + (X_0, D_Z Y) + (X_0, D_Y Z)\\ &+ (X_0, D_{Z'}X_0) + (X_0, D_{X_0}Z') - div_g Z'\\ &= 0\end{aligned}} \qquad (7)$$

où on a regroupé par ailleurs $D_{X_0}\mu + \mu.div_g X_0 = div_g(\mu X_0)$.

Puis

$$\boxed{\begin{aligned}g(\nabla_i G^{ij}, Y) =&- div_g(eX_0) + \mu(Y, D_{X_0}X_0) + (Y, \nabla^i G'_{ij}) + div_g(\gamma Y)\\ &+ div_g Z + (Y, D_Z Y) + (Y, D_Y Z)\\ &+ (Y, D_{X_0}Z') + (Y, D_{Z'}X_0)\\ &= 0\end{aligned}} \qquad (8)$$

Enfin, en projetant (6) sur H', on obtient :

$$\begin{aligned}&pr_{H'}\{\mu D_{X_0}X_0 - e[D_{X_0} + D_Y X_0] + (\nabla_i G'^{ij})\\ &+ D_Z Y + D_Y Z + (div_g Y)Z + D_{Z'}X_0 + D_{X_0}Z' + (div_g X_0)Z'\}\\ &= 0\end{aligned}$$

On remarque alors l'importante relation suivante : ${}^eF = \nabla_i Y^j - \nabla^j Y_i$ et ${}^eK = \nabla_i Y^j + \nabla^j Y_i$. Donc $2DY = {}^eF + {}^eK$, et

$$\boxed{D_{X_0}Y = \frac{1}{2}[{}^eF(X_0) + {}^eK(X_0)]}$$

En écrivant alors $D_Y X_0 = D_{X_0}Y - [X_0, Y]$, la dernière projection s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned}&pr_{H'}\{\mu D_{X_0}X_0 - e.[{}^eF(X_0) + {}^eK(X_0)] + (\nabla_i G'^{ij})\\ &+ e[X_0, Y] + D_Z Y + D_Y Z + (div_g Y)Z\\ &+ D_{Z'}X_0 + D_{X_0}Z' + (div_g X_0)Z'\}\\ &= 0\end{aligned}} \qquad (9)$$

Cette dernière équation peut s'interpréter comme étant l'équation de la dynamique que mesure la famille d'observateurs X_0, qui ne percevrait que ce qui se passe sur H', leur espace "perçu", et ne percevant pas ce qui se passe sur la cinquième dimension portée par Y. Mais nous allons voir, et cela nous semble remarquable, que les deux autres projections, sur X_0 et sur Y, correspondent exactement aux équations de conservations dans le cadre d'un modèle très naturel de fluide. Remarquons que changer Y en $-Y$ revient à changer e en $-e$.

Pour terminer cette section, on peut s'amuser à donner quelques définitions "classiques" :

1. Un observateur de (M, g) est une courbe $\gamma : I \to M$ de genre temps.
2. L'espacetemps ressenti par γ en $x = \gamma(t)$ est $Y_x^\perp$.
3. L'espace vu par γ en $x = \gamma(t)$ est $\gamma'(t)^\perp$.
4. L'espace ressenti γ en $x = \gamma(t)$ est $< Y_{\gamma(t)}, \gamma'(t) >^\perp$, (i.e $H'_{\gamma(t)}$).
5. Un observateur *classique*, ou *galiléen*, est une courbe γ de genre temps et horizontale, i.e. $\gamma'(t) \perp Y_{\gamma(t)}$ pour tout t. Si un tel observateur ne perçoit que 4 dimensions et pas celle portée par Y, alors ses processus de "mesures" correspondent à des projections sur son espace horizontal, $H_{\gamma(t)}$.

4.4.2 Fluide de "matière".

Appliquons maintenant ces équations à ce qui nous motivait au départ, à savoir la matière et l'électromagnétisme .

Rappelons que l'on note ${}^eG_H$ le champ d'endomorphismes sur les espaces horizontaux $H_x = (Y_x)^\perp$ défini par ${}^eG_H = pr_H \circ ({}^eG_{|H})$, où pour $x \in M$, $(pr_H)_{|x}$ est la projection orthogonal de T_xM sur H_x. En s'inspirant des modèles classiques, on définit :

Un fluide est un domaine de M où il existe un champ de vecteur de genre temps naturel. Plus précisément, au moins dans un premier temps, un fluide est un domaine de M où ${}^eG$ admet en tout point un sous-espace propre de dimension 1, de genre temps, orthogonal à Y.

Les équations de la section précédente sont alors valide pour X_0 un vecteur propre de ce sous-espace, unitaire et dans l'orientation. Nous allons voir que les équations classiques pour un fluide de matière apparaissent comme des approximations, où selon notre point de vue, il s'agit de comprendre approximation comme "hypothèse géométrique supplémentaire".

On commence par poser :

Définition 13. *(Domaine de type 2, fluide chargé). Soit $\Omega \subset M$ un domaine de la variété (M, g). On dit que Ω est un domaine de type 2, ou un domaine de fluide de matière chargée, si la courbure d'Einstein G de Ω vérifie :*

1. *$\forall x \in \Omega$, ${}^eG_H(x)$ admet une valeur propre -$\mu(x) < 0$ d'espace propre $E_{-\mu}(x)$ de dimension 1 et de genre temps.*
2. *$\forall x \in \Omega$, ${}^eG_x(Y_x) \in < E_{-\mu}(x), Y_x >$, l'espace engendré par $E_{-\mu}(x)$ et Y_x.*

Dans les notations de la section précédente, l'hypothèse 1 signifie que $Z' = 0$, et l'hypothèse 2 que $Z = 0$. Notez alors qu'en tout point x, le sous-espace $< X_0(x), Y_x >$ est stable par ${}^eG_x$. Dans un domaine de type 2, on définit *canoniquement* un champ de vecteur unitaire X_0, de genre temps, dans l'orientation, et tel que $E_{-\mu}(x) =< X_0(x) >$. Comme dans la section précédente,

pour écrire les matrices, on complète alors X_0 et Y par 3 champs de vecteurs X_1, X_2 et X_3, non canoniques, de sorte que (X_0, X_1, X_2, X_3, Y) forment en tout point $x \in M$ une base g-orthonormée de T_xM. Alors H_x a pour base (X_0, X_1, X_2, X_3), et le sous espace canonique $H'_x =< X_0(x), Y_x >^{\perp}$ de H_x a pour base $H'_x =< X_1, X_2, X_3 >$. H'_x peut s'interpréter comme l'espace "perçu" par l'observateur $(X_0)_x$ lié au fluide. On reprend ensuite toutes les notations de la section précédente.

Les matrices de G et ${}^eG$ s'écrivent alors :

$$G = \begin{pmatrix} \mu & 0 \quad 0 \quad 0 & e \\ 0 & & 0 \\ 0 & (G')_{|H'} & 0 \\ 0 & & 0 \\ e & 0 \quad 0 \quad 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

et

$${}^eG = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \quad 0 \quad 0 & e \\ 0 & & 0 \\ 0 & (G')_{|H'} & 0 \\ 0 & & 0 \\ -e & 0 \quad 0 \quad 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Sous forme tensorielle, on peut écrire :

$$\boxed{G = \mu X_0 \otimes X_0 - e(X_0 \otimes Y + Y \otimes X_0) + \gamma Y \otimes Y + G'} \qquad (10)$$

Les équations de la dynamique de la section précédente deviennent alors :

-Seconde équation de Maxwell :

$$\boxed{-div_g({}^eF) = 2e.X_0 + 2[grad(div_g Y) + div_g K] + (2\gamma + S_g).Y} \qquad (11)$$

-Conservation de la "masse" :

$$\boxed{\begin{aligned} g(\nabla_i G^{ij}, X_0) = & - div_g(\mu X_0) - e(X_0, D_{X_0}Y) + e.div_g Y \\ & + (X_0, \nabla_i (G')^{ij}) \\ & = 0 \end{aligned}} \qquad (12)$$

-Conservation de la "charge" :

$$\boxed{\begin{aligned} g(\nabla_i G^{ij}, Y) = & -div_g(eX_0) + \mu(Y, D_{X_0}X_0) + (Y, \nabla^i G'_{ij}) + div_g(\gamma Y) \\ & = 0 \end{aligned}} \qquad (13)$$

Et enfin, l'équation du mouvement, vu par les observateurs X_0 liés au fluide :

$$\boxed{pr_{H'}\{\mu D_{X_0}X_0 - e.[{}^eF(X_0) + {}^eK(X_0)] + (\nabla_i G'^{ij}) + e.[X_0, Y]\} = 0} \qquad (14)$$

Pour justifier les noms que nous avons donné à ces équations, donnons un modèle plus "élaboré" de fluide, ce qui revient, une fois encore, à rajouter des conditions géométriques :

Définition 14. *(Domaine de type 2', fluide parfait). Soit $\Omega \subset M$ un domaine de la variété (M, g). On dit que Ω est un domaine de type 2', ou un fluide parfait, si Ω est un domaine de type 2 sur lequel de plus $K = 0$.*

Cela revient donc à dire que Y est un champ de Killing, ou encore que le flot de Y engendre un groupe local d'isométries. Nous avons vu que cela impliquait par ailleurs $div_g Y = 0$. De plus, cela implique $D_Y \gamma = D_Y e = D_Y \mu = 0$ puisque γ, e et μ sont des caractéristiques intrinsèques de G. Les équations précédentes se simplifient tout de suite :

-Seconde équation de Maxwell :

$$-div_g({}^eF) = 2e.X_0 + (2\gamma + S_g).Y$$

-Conservation de la "masse" :

$$g(\nabla_i G^{ij}, X_0) = -div_g(\mu X_0) - e(X_0, D_{X_0} Y) + (X_0, \nabla_i (G')^{ij}) = 0$$

-Conservation de la "charge" :

$$g(\nabla_i G^{ij}, Y) = -div_g(eX_0) + \mu(Y, D_{X_0} X_0) + (Y, \nabla^i G'_{ij}) = 0$$

Et enfin, l'équation du mouvement, vu par les observateurs X_0 liés au fluide :

$$pr_{H'}\{\mu D_{X_0} X_0 - e.{}^eF(X_0) + (\nabla_i G'^{ij}) + e.[X_0, Y]\} = 0$$

Mais l'hypothèse $K = 0$, impliquant que le flot de Y engendre des isométries, implique aussi que $[X_0, Y] = -\mathcal{L}_Y X_0 = 0$ et à partir de là que $D_{X_0} X_0$ est horizontal, et $(Y, D_{X_0} X_0) = -(X_0, D_{X_0} Y) = 0$. En effet, on a donc $D_Y X_0 = D_{X_0} Y$, et on a vu dans la proposition de la section précédente que $(D_Y X_0, X_0) = 0$. Donc $0 = ([X_0, Y], X_0) = (D_{X_0} Y, X_0) - (D_Y X_0, X_0) = -(Y, D_{X_0} X_0)$ ce qui signifie bien que $D_{X_0} X_0$ est horizontal.

Les équations deviennent alors :

-Seconde équation de Maxwell :

$$\boxed{-div_g({}^eF) = 2e.X_0 + (2\gamma + S_g).Y} \tag{15}$$

-Conservation de la "masse" :

$$\boxed{g(\nabla_i G^{ij}, X_0) = -div_g(\mu X_0) + (X_0, \nabla_i (G')^{ij}) = 0} \tag{16}$$

-Conservation de la "charge" :

$$\boxed{g(\nabla_i G^{ij}, Y) = -div_g(eX_0) + (Y, \nabla^i G'_{ij}) = 0} \tag{17}$$

Et enfin, l'équation du mouvement, vu par les observateurs X_0 liés au fluides :

$$\boxed{\mu D_{X_0} X_0 - e.{}^eF(X_0) + (\nabla_i G'^{ij}) = 0} \tag{18}$$

Avouez que c'est saisissant ! On appelle alors bien sûr, e la densité de charge, μ la densité de masse, et G'^{ij} la pression du fluide. On retrouve ainsi exactement les équations classiques d'Einstein-Maxwell-Lorentz. Notez que la projection de la seconde équation de Maxwell sur H, représentant ce que "perçoit" la famille

d'observateurs X_0, est exactement $-div_g(^eF) = 2e.X_0$. De plus si on considère un fluide sans pression, i.e. $G' = 0$, les équations de conservations deviennent $div_g(\mu X_0) = div_g(eX_0) = 0$, et le mouvement $\mu D_{X_0}X_0 = e.^eF(X_0)$ c'est à dire exactement la loi de Lorentz. Enfin, si on prend $G' = \lambda.Id$, on récupère exactement les équations des fluides parfaits. C'est-y pas beautifull mon ami ?

Notons par ailleurs que, lorsque $K = 0$, c'est à dire pour un fluide de type $2'$, le coefficient un peu mystérieux γ prend une signification très claire :
$\gamma = |F|_g + 1/2S_g$.

Il est très important de comprendre que les types 2 et 2' ne sont que des modèles approchés de fluides généraux. En particulier, on retrouve les dernières équations, identiques aux "classiques", si dans celles de la section précédentes on considère que les projections sur H' et $< X_0 >$ de Z, Z', Y et de leurs dérivées DZ, DZ', DY sont "négligeables" par rapport aux autres expressions pour la mesure Riemannienne induite sur H' et $< X_0 >$ par g.

4.4.3 A-t-on écrit toute les équations ?

Nous avons obtenu les équations précédentes en utilisant des identités issues de la géométrie Riemannienne. Mais il en existe beaucoup d'autres. On peut donc se demander si on ne peut obtenir d'autres équations ayant un sens physique.

On peut par exemple calculer tr_gG qui vaut par définition $-3/2S_g$ mais aussi $-\mu + tr_gG' + \gamma$, d'où l'équation supplémentaire

$$\mu - tr_gG' - \gamma = 3/2S_G$$

Notons que ce type d'équation existe déjà en relativité générale "classique" à 4 dimensions.

Il y a également une équation fondamentale que nous n'utilisons pas dans cet article, à savoir l'équation de Raychaudhuri (voir Hawking-Ellis, Wald, Choquet-Bruhat). Elle donne l'évolution d'une famille de géodésiques définies comme courbes intégrales d'un champ de vecteurs X vérifiant $D_XX = 0$. Cette équation, généralement donnée en dimension 4, est tout-à-fait valable en dimension 5, et donne des équations de "mouvement" ou d'évolution importantes.

Ainsi, à ce stade, on peut-dire que les équations de la physique s'obtiennent à partir de l'identité de Bianchi et de l'équation de Raychaudhuri, appliquées à des domaines d'un type bien choisi.

4.5 Un cas particulier, la théorie de Kaluza-Klein.

Il est fondamental de noter que dans cette section, nous n'avons jamais parlé de tenseurs d'énérgie-impulsion, cette notion n'ayant plus de sens dans notre vision. Néanmoins, pour être complet, nous allons voir que l'on retrouve très naturellement avec notre vision, c'est-à-dire lorsque l'on n'impose pas $Ricci = 0$, les tenseurs d'énérgie-impulsion usuels avec la théorie classique de Kaluza-Klein, théorie qui apparaît maintenant comme un cas particulier de ce qui précède. Notez que cela court-circuite complètement les méthodes Lagrangiennes. Par ailleurs, cette section n'a pour seul but que de faire le lien avec les travaux classiques sur cette théorie, qui n'apparaît pour nous que comme un modèle approché de la situation de la section précédente, c'est-à-dire encore et toujours,

géométriquement plus sophistiquée. Cette section est du coup trop longue par rapport à la précédente.

4.5.1 Aspects Mathématiques.

Nous présentons directement la description moderne de la théorie de Kaluza-Klein.

On considère que l'Univers est une variété ł(M, g) de dimension 5, munie d'une structure de fibré principal de groupe de Lie S^1, (le cercle).

La théorie des fibrés principaux est décrite dans plusieurs ouvrages, par exemple le Kobayashi-Nomizu. Néanmoins, dans le cas d'un fibré en cercle, la théorie se simplifie beaucoup, nous en donnerons donc ici une vision plus élémentaire. Un référence très importante sur laquelle nous nous appuyons est [Bourguignon].

Définition 15. *(Hypothèses :) On considère une variété ł(M, g) de dimension 5 , orientée en temps, g étant de signature $(-, +, +, +, +)$, telle que le groupe de Lie S^1 opère sur M transitivement et librement, de sorte que $\overline{M} := M/S^1$ est une variété. De plus, il existe une submersion Riemannienne $\pi : (M, g) \rightarrow (\overline{M}, \overline{g})$ telle que $\overline{g}$ soit de signature $(-, +, +, +)$ et que $\forall x \in \overline{M}$, $\pi^{-1}(x)$ soit de genre espace. On suppose de plus dans cette partie que $vol_g \pi^{-1}(x) = cste$ sur M. On montre alors que les fibres $\pi^{-1}(x)$ sont des géodésiques de M.*

On voit alors que M apparaît comme un cas particulier des variétés étudiées dans la section précédente, sous l'hypothèse 2. Il suffit d'y poser $K = 0$, et de demander que la sous-variété S_x soit la fibre $\pi^{-1}(x)$, en posant $vol_g(\pi^{-1}(x)) = \epsilon$.

On définit alors à partir de là des objets naturels :

Définition 16. *En choisissant une orientation, on définit un champ de vecteurs Y sur M, en posant qu'en chaque point x de M, Y_x est le vecteur tangent à la fibre $\pi^{-1}(\pi(x))$ passant par x et tel que $g(Y, Y) = 1$. On définit alors une 1-forme Y^* associée à Y par g, ($Y^* = Y^b = Y_i$ si $Y = Y^i$). Ensuite, on définit l'espace horizontal H_x en $x \in M$ comme étant le sous-espace de $T_x(M)$ g-orthogonal à Y_x. Noter alors qu'on peut écrire, en abusant un peu, $g = \overline{g} + Y^* \otimes Y^*$. Enfin, on note $F = d(Y^*)$ la différentielle de Y^*.*

Notons qu'ici, grâce à l'opération du groupe S^1, un choix continu pour l'orientation de Y peut être fait.

Quelques rappels. On note $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} S g_{ij}$ la courbure d'Einstein. ${}^eG_i^j$ est l'endomorphisme associé. On note ${}^eG_H$ le champ d'endomorphisme sur les espaces horizontaux H_x défini par ${}^eG_H = pr_H \circ ({}^eG_{|H})$, où pour $x \in M$, $(pr_H)_{|x}$ est la projection orthogonal de $T_x M$ sur H_x.

On montre que du fait de la S^1-invariance de F, on peut définir sans ambiguïté une 2-forme $\overline{F} \in \Lambda^2(\overline{M})$ telle que $\pi^* \overline{F} = F$.

Pour obtenir le lien entre les courbures de M et de $\overline{M}$, il est intéressant de se donner des bases particulières des espaces tangents. Marquant d'une barre les objets de $\overline{M}$, fixons encore quelques notations. Pour tout vecteur tangent $X \in T_x M$, notons X^h la projection orthogonal sur H_x et X^v celle sur $< Y_x >$, l'espace engendré par Y_x. $d\pi_x$ est une isométrie entre H_x et $T_{\overline{x}}\overline{M}$ où $\overline{x} = \pi(x)$. On note alors, pour un vecteur $\overline{X}$ de $T_{\overline{x}}\overline{M}$, $\overline{X}^r$ le relevé horizontal de $\overline{X}$, i.e. $\overline{X}^r \in H_x$, et $d\pi_x(\overline{X}^r) = \overline{X}$.

Utilisant la structure de fibré et l'isométrie $d\pi_x$, on construit alors le champ de bases suivant. On prend X_0 un champ de vecteur horizontal (i.e $\in H_x$ pour tout x), de genre temps sur M, orthogonal en tout point à Y, et tel que $g(X_0, X_0) = -1$. On complète ensuite X_0 en une base g-orthonormée (X_0, X_1, X_2, X_3) de H_x. Les champs X_p peuvent être construit de tel sorte qu'il existe des champs $\overline{X}_p$ sur $\overline{M}$ formant une base de $T_{\overline{x}}\overline{M}$ en tout point, et tel que $(\overline{X}_p)^r = X_p$.

Tout repose alors sur les formules suivantes, que l'on peut trouver dans [Bourguignon].

Proposition 3. *Pour des champs de vecteurs X, Z sur M, associés à des champs $\overline{X}, \overline{Z}$ sur $\overline{M}$ tel que $\overline{X}^r = X$ et $\overline{Z}^r = Z$, on a :*

- $R(X, Z) = \overline{R}(\overline{X}, \overline{Z}) + 2\overline{F} \circ \overline{F}(\overline{X}, \overline{Z})$.
- $R(X, Y) = -2d^*F(X) = 2div_g F(X)$.
- $R(Y, Y) = |F|_g^2$
- $S = \overline{S} - |F|_g^2$

Il faut comprendre $\overline{F} \circ \overline{F}(\overline{X}, \overline{Z})$ comme $\overline{F}_i{}^l \overline{F}_{lj} X^i Z^j$. Par ailleurs, on a noté $div_g T = cDT$ et $d^*T = -cDT$ pour un tenseur T. Attention : l'écriture $|F|_g^2$ est trompeuse ; elle signifie $|F|_g^2 = F^{ij}F_{ij}$ et donc, du fait de la signature de g, peut être ≤ 0.

Des calculs assez simples montrent que : $G_{ij} = R_{ij} - 1/2(\overline{S} - 1/4|F|_g^2)g_{ij}$.

On résume alors sous forme de matrices les équations de la proposition précédente :

$$R_{IJ} = \begin{pmatrix} & & & 1/2(div_g F)_0 \\ & \overline{R}_{ij} + \overline{F}_i{}^l \overline{F}_{lj} & & \vdots \\ & & & 1/2(div_g F)_3 \\ 1/2(div_g F)_0 & \dots & 1/2(div_g F)_3 & 1/4|F|_g^2 \end{pmatrix}$$

et

$$G_{IJ} = \begin{pmatrix} & & & 1/2(div_g F)_0 \\ & \overline{G}_{ij} + 1/2(\overline{F}_i{}^l \overline{F}_{lj} + 1/4|F|_g^2 . g_{ij}) & & \vdots \\ & & & 1/2(div_g F)_3 \\ 1/2(div_g F)_0 & \dots & 1/2(div_g F)_3 & 3/8|F|_g^2 - 1/2S \end{pmatrix}$$

Si l'on définit, complètement par hasard, $T_{ij}^F = -1/2(\overline{F}_i{}^l \overline{F}_{lj} + 1/4|F|_g^2 . g_{ij})$, la dernière matrice s'écrit :

$$G_{IJ} = \begin{pmatrix} & & & 1/2(div_g F)_0 \\ & \overline{G}_{ij} - T_{ij}^F & & \vdots \\ & & & 1/2(div_g F)_3 \\ 1/2(div_g F)_0 & \dots & 1/2(div_g F)_3 & 3/8|F|_g^2 - 1/2S \end{pmatrix}$$

Alors :

$${}^eG_I{}^J = \begin{pmatrix} & & & 1/2(div_g F)_0 \\ & \overline{G}_i{}^j - (T^F)_i{}^j & & \vdots \\ & & & 1/2(div_g F)_3 \\ -1/2(div_g F)_0 & \dots & 1/2(div_g F)_3 & \gamma \end{pmatrix}$$

où $\gamma = 3/8|F|_g^2 - 1/2S$. On retrouve bien la remarquable idée de Kaluza et Klein faisant apparaître naturellement T^F.

Notons alors que l'on a :

$$^eG(Y) = 1/2(div_g F)_0.X_0 + \ldots + 1/2(div_g F)_3.X_3 + \gamma.Y$$

et donc :

$$pr_H(^eG(Y)) = pr_H(1/2 div_g F) \tag{19}$$

Nous regroupons ici les propriétés de la base g-orthonormée $(X_0, X_1, X_2, X_3, Y)_x$ de T_xM, que l'on déduit par exemple de la proposition analogue de la section 4.4.

Proposition 4. *On note (X,Z) le produit scalaire $g(X,Z)$.*

1. $D_Y Y = 0$
2. $\forall p$, $D_Y X_p = D_{X_p} Y$, *i.e.* $[X_p, Y] = 0$.
3. $D_Y X_p$ *et* $D_{X_p} Y$ *sont horizontaux.*
4. $(D_Y X_p, X_p) = (D_{X_p} Y, X_p) = 0$
5. $(D_{X_r} X_p, X_p) = 0$
6. $D_{X_p} X_p$ *est horizontal.*
7. $div_g Y = 0$.
8. *L'endomorphisme* $^eF = {}^e(dY^*)$ *associé à* F *par* $(^eF)_i{}^j = F_i{}^j$ *vérifie* $^eF = 2DY$. *Ainsi,* $^eF(X_0) = 2D_{X_0} Y$.
9. $div_g F = 2R_{ij} Y^j$

Nous avons posé l'essentiel des outils et définitions mathématiques pour ce qui va suivre...

4.5.2 L'électromagnétisme chez Kaluza-Klein.

Nous avons vu qu'en dimension 4, on ne pouvait définir géométriquement les objets de l'électromagnétisme classique, essentiellement parce qu'on ne pouvait définir naturellement une 2-forme correspondante ; on n'avait que la partie à trace nulle de G_{ij} correspondant à T^F. Nous avons vu qu'à partir du choix d'un *type* correspondant à la modélisation classique d'un fluide chargé, mais maintenant en dimension 5, on pouvait redéfinir *géométriquement* tous les objets physiques classiques et surtout obtenir les équations classiques de Maxwell-Lorentz pour un "observateur" ne percevant que 4 dimensions. Dans le cadre de la théorie de Kaluza-Kein, on choisit ce modèle en "remontant" par π le modèle de fluide chargé de la dimension 4. Les expressions des matrices de G font maintenant apparaître de plus le tenseur électromagnétique T^F naturellement. Pour nous rapprocher toujours plus des résultats classiques et connus de la physiques nous augmentons encore un peu les hypothèse géométriques, ce qui revient, rappelons-le, à faire plus "d'approximations" physiques.

Définition 17. *(Domaine de type 2K, fluide chargé). Soit $\Omega \subset M$ un domaine de la variété (M,g). On dit que Ω est un domaine de type 2K (pour Kaluza-Klein), si la courbure d'Einstein G de Ω vérifie :*

1. $\forall x \in \Omega$, ^eG_H *admet :*

- *Une valeur propre -$\mu(x) < 0$ d'espace propre $E_{-\mu}(x)$ de dimension 1 et de genre temps.*
- *une deuxième valeur propre $\lambda(x)$, $-\mu(x) < \lambda(x) < \mu(x)$, telle que $dimE_\lambda(x)$=3 et $E_\lambda\, {}_g\!\perp E_{-\mu}$.*

2. *$\forall x \in \Omega$, l'espace $< E_{-\mu}(x), Y(x) >_{T_xM}$ est stable sous ${}^eG$.*

Dans un domaine de type 2K, on définit *canoniquement* un champ de vecteur unitaire, de genre temps, dans l'orientation, et tel que $E_{-\mu}(x) =< X_0(x) >$. On choisit alors une base X_1, X_2, X_3 de E_λ tel que (X_0, X_1, X_2, X_3, Y) soit une base g-orthonormée de T_xM. Dans cette base, les matrices de G et ${}^eG$ sont les suivantes :

$$G_{IJ} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \; et \; {}^eG_I{}^J = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -e & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

En effet, d'après l'hypothèse de stabilité, ${}^eG(X_0) = aX_0 - eY$. Alors, $G_H(X_0) = pr_H(aX_0 - eY) = aX_0$, donc $a = -\mu$. De même, ${}^eG(Y) = a'X_0 + \gamma Y$, et par symétrie, $a' = e$.

Remarque : e est "canoniquement" donné par $e = -g({}^eG(Y), X_0)$. De même, $\gamma = g({}^eG(Y), Y)$.

On voit ainsi tout de suite que

$$pr_H(div_g F) = 2eX_0$$

ce qui est la deuxième équation de Maxwell. La première équation de Maxwell, $dF = 0$, est immédiate puisque par définition F est exacte, donc fermée, $F = dY^*$.

Là encore, le choix d'un modèle *géométrique*, un type correspondant à la vision classique d'un fluide, redonne très simplement les deux équations de Maxwell. On applique ensuite les résultats de la section 4.4.2 pour retrouver l'équation classique du mouvement et les équations de conservations. (On peut aussi les retrouver un peu plus simplement dans ce cadre en utilisant la proposition 4). On trouve ainsi :

-Seconde équation de Maxwell :

$$\boxed{-div_g({}^eF) = 2e.X_0} \tag{20}$$

-Conservation de la "masse" :

$$\boxed{-g(\nabla_i G^{ij}, X_0) = div_g(\mu X_0) + \lambda div_g X_0 = 0} \tag{21}$$

-Conservation de la "charge" :

$$\boxed{-g(\nabla_i G^{ij}, Y) = div_g(eX_0) = 0} \tag{22}$$

Et enfin, l'équation du mouvement, vu par les observateurs X_0 liés au fluides :

$$\boxed{(\mu + \lambda)D_{X_0}X_0 - e.{}^eF(X_0) + grad_{1,2,3}\lambda = 0} \tag{23}$$

En remontant par π les types 3 ou 4 vu en section 2 sur la dimension 4, on retrouve également tous les résultats classiques de manière purement géométrique.

Pour tout champs de vecteurs $\overline{X}, \overline{Y}$ sur $\overline{M}$, et leurs relevés $X := \overline{X}^r$ et $Y := \overline{Y}^r$, on a $D_X Y = (D_{\overline{X}}\overline{Y})^r + 1/2[X,Y]^v$ et $div_{\overline{g}}\overline{X} \circ \pi = div_g X$. Par conséquent, si l'on suppose que les "observateurs" X_0 ne perçoivent, ou ne mesurent (c.f. section suivante), que ce qui se passe sur $\overline{M}$, on voit là encore qu'en projetant par π les formules ci-dessus, on retrouve exactement les formules classiques d'Einstein-Maxwell-Lorentz pour la famille d'observateurs $\overline{X}_0$.

4.6 De la notion de mesure physique. Moyennes, quantités négligeables.

Revenons sur les simplifications successives des équations que nous avons obtenues au long de cette section. Les équations obtenues pour une famille d'observateurs sont complètement générales; elles découlent de la seule hypothèse d'une cinquième dimension géodésique (même pas forcément fermée ou petite). Le passage au fluide de matière correspond au choix d'un modèle physique, défini par une géométrie particulière. Une fois une famille d'observateurs définis, les équations obtenues en tenant compte de ces hypothèses géométriques particulières peuvent s'interpréter comme le résultat des mesures effectuées par ces observateurs. Considérant qu'ils ne perçoivent que 4 dimensions, ces mesures peuvent résulter de deux démarches. Soit les mesures "négligent" tout ce qui se passe dans la cinquième dimension, cela revient alors à projeter toutes les équations sur H ou H'. Soit les mesures consistent à faire une *moyenne* sur cette cinquième dimension, cela revient alors à passer au quotient, c'est le cadre du modèle fibré de la théorie de Kaluza-Klein. Dans les deux cas on retrouve les équations classiques de manière géométrique. Notons que supposer $K = 0$, i.e. que Y est un champ de Killing, peut aussi s'interpréter comme une approximation, la cinquième dimension étant "tellement petite" que l'on y néglige les "variations" de g; or à peu de chose près, si $K = 0$, on peut définir sur M une structure de fibré en cercle.

4.7 Le cas de la constante cosmologique.

On introduit simplement, si besoin, la fameuse constante cosmologique Λ dans notre modèle en posant par exemple que Ω est de type 2Λ si $G + \Lambda g$ vérifie les hypothèses du type 2 (ou 2').

5 Au delà de la dimension 5.

Donnons, à titre anecdotique, une définition possible pour des "petites dimensions" supplémentaires qui se grefferaient sur un espacetemps classique de dimension 4, et qui généralise celle donnée pour une cinquième dimension. Cette généralisation semble nécessaire, selon la théorie des cordes.

On peut par exemple poser comme définition :

M est une variété łde dimension $n = 4 + m$ pour laquelle il existe un $\epsilon > 0$ tel qu'en chaque point $x \in M$, il existe une sous variété S_x, de dimension m, totalement géodésique et non contractile (i.e n'ayant pas même type d'homotopie qu'un point), de genre espace, et de diamètre (pour la métrique induite

naturellement par g) inférieure à ϵ. On suppose que le champ de sous-variétés $x \mapsto S_x$ est différentiable au sens où au voisinage de tout point $x \in M$ il existe m champs de vecteurs formant une base de T_pS_p pour tout point p de ce voisinage.

Pourquoi ne pas imaginer par ailleurs, que la métrique g est de signature quelconque, S_x n'étant plus soumis à la condition d'être d'un genre particulier. Enfin bref, on peut essayer beaucoup de choses...

Il est important de remarquer que notre modèle d'unification géométrique de la gravitation et de l'électromagnétisme n'exclut pas l'existence de dimensions au-delà de 5. Plusieurs modèles sont possibles, nous en proposons un sans chercher ici la plus grande généralité ; le lecteur pourra en imaginer d'autres...

M est une variété łde dimension $n = 4+1+m$, telle qu'il existe $\epsilon, \epsilon' > 0$ de sorte que $\forall x \in M$, il passe par x une unique sous-variété V_x de genre espace, compacte, non contractile, complètement géodésique, de dimension $m+1$ et de diamètre $\leq \epsilon$, telle que de plus :

-i/ il existe une unique sous-variété de dimension 1 γ_x de V_x, passant par x, totalement géodésique, compacte et non homotope à un point, qui réalise le diamètre de V_x, et

-ii/ il existe une unique sous-variété W_x de V_x, de dimension m et de diamètre $\leq \epsilon'.\epsilon$ ($W_x \perp_g \gamma_x$?)

(Autre possibilité, on peut remplacer ii/ par : toute géodésique de V_x fermée et de diamètre $< \epsilon$, est de diamètre $\leq \epsilon'.\epsilon$.)

L'idée est bien sûr, que les dimensions "au-delà" de 5 sont encore plus "petites" que la "cinquième. Un exemple de telle variété serait obtenu par exemple si M est une variété fibrée, de fibre $S^1 \times W$, munie d'une métrique adéquate.

Un fluide de type 2K serait alors par exemple un domaine de M dans lequel G se représenterait de la manière suivante :

On définit toujours Y_x comme le vecteur tangent normalisé à γ_x. On décompose T_xM en une somme g-orthogonale $T_xM =< X_0 > \oplus H'_x \oplus < Y_x > \oplus E_x$, où E_x est l'espace tangent à W_x et où on reprend quelques notations de la section 4.4.2. On pose alors $U_k = pr_{|E_x} \circ {}^eG(X_k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$ et $U_4 = pr_{|E_x} \circ {}^eG(Y)$, où (X_k) est une base de H'_x. G s'écrit alors :

$$\boxed{\begin{aligned} G =& \mu X_0 \otimes X_0 - e(X_0 \otimes Y + Y \otimes X_0) + \gamma Y \otimes Y + G' \\ &+ \sum_0^3 (U_k \otimes X_k + X_k \otimes U_k) + (U_4 \otimes Y + Y \otimes U_4) + G'' \end{aligned}} \tag{24}$$

De même qu'à la fin de la section 4.4.2, si l'on suppose que dans le cas d'un fluide chargé, nous observons un type où les projections sur H', $< X_0 >$ et $< Y >$ des U_k et de G'', et de leur dérivées DU_k et DG'', sont "négligeables" pour les mesures induites par g sur H', $< X_0 >$ et $< Y >$, on retrouve les équations d'Einstein-Maxwell-Lorentz de la fin de la section 4.4.2.

6 Critiques physiques ?

Notre travail ne présente pas de résultats mathématiques ou physiques nouveaux, mais propose un regard différent sur des théories existantes. Les principes et méthodes exposés dans ce papier, et menant à une vision géométrique de la physique, reposent ainsi sur des faits mathématiques, mais aussi sur des

réflexions et des choix épistémologiques. En tant que tels, ces choix sont certainement sujets à critiques du point de vue de leur pertinence physique. Tentons ici de préciser, de manière heuristique, notre pensée, et d' anticiper ces critiques. Tout d'abord, en tant que mathématiciens, nous sommes guidés par l'esthétisme, et les auteurs trouvent tout cela très joli... mais bon, ils ne sont peut-être pas complètement objectifs.

Plus pragmatiquement, notre but est d'obtenir une vision géométrique unifiée de la gravitation et de l'électromagnétisme. La physique cherche des lois. Des lois d'abord pour prédire le résultat d'expériences. Nous avons vu comment le déterminisme pouvait se décrire en termes de théorèmes de Cauchy. Mais le but de la physique est aussi de mettre en évidence des principes qui permettent d'anticiper, de prédire, la description des phénomènes physiques. En ce sens, il est tentant d'espérer qu'une géométrie simple et sans approximation en dimension 5, comme Ricci=0, permette de retrouver toute la physique classique en dimension 4 : une seule équation donnerait tout ! En effet, cette équation est sans ambiguïté. Mais malheureusement, ça ne marche pas.

Une critique raisonnable à l'encontre de notre méthode est alors de savoir comment on trouve le bon type à imposer pour décrire par exemple un fluide chargé. On est là dans une démarche expérimentale, le type choisi doit, une fois que l'on en a déduit les équations du mouvement, correspondre à l'observation ; c'est bien le cas par exemple de notre type 2. Mais nous pouvons répondre que c'est bien ce que l'on fait aussi en physique lorsque l'on choisit un tenseur d'énergie-impulsion ou un lagrangien ; seule l'expérience valide ce choix effectué à priori. En ce sens le choix d'un type n'est pas différent.

En revanche, il est remarquable de constater que les identités géométriques comme la seconde identité de Bianchi permettent de retrouver très naturellement les équations de la physique, y compris les équations de conservations que l'on doit souvent postuler en physique. De plus cette méthode s'avère beaucoup plus simple que l'application des méthodes variationnelles, (comme le montre les démonstrations à peine ébauchées du Hawking-Ellis pour les fluides chargés, ou le chapitre 9 de [12]). Enfin, nous avons vu en section 5 qu'une structure géométrique très simple modélisant l'idée d'une "petite" dimension donnait, pour une famille "d'observateurs" par exemple liés au modèle le plus naturel de fluide de particules, des équations par l'identité de Bianchi, ou par le calcul de quelques objets géométriques, divergence, trace, etc... Les équations classiques de la gravitation et de l'électromagnétisme apparaissent alors comme des approximations simples de ces équations, liés entre autres à nos limitations de perception et de mesures, par exemple l'incapacité à percevoir plus de 4 dimensions.

Notre ambition est donc beaucoup plus modeste que la théorie des cordes par exemple. Celle-ci semble vouloir, à partir d'une structure géométrique sur la quelle on impose une condition type Ricci=0 (fibré en variété de Kalabi-Yau), retrouver toutes les équations et constantes de l'univers à partir de quelques lois. Mais n'y-a-t-il pas là finalement une ambition excessive ?

Notre vision est que la physique consiste à découvrir des approximations géométriques judicieuses, sous forme de type, d'un espace-temps très souple, ces approximations pouvant d'ailleurs être imposées par nos capacités limitées de perception ou de mesure ; c'est ce que nous avons proposé dans la section 5. Peut-être aussi ne cherche-t-on à faire de la physique que dans des domaines d'un type possédant certaines propriétés de rigidité, et possédant des

"grandeurs" conservées le long de certaines courbes-trajectoires. Ces approximations n'empêchent par d'obtenir des modèles physiques efficaces, éventuellement déterministe. Les " équations physiques" n'apparaissent bien alors que comme des identités issues d'une géométrie simplifiée, ou, si l'on préfère, plus précise.

7 Remarque : schéma de notre démarche

Il est souvent regrétable que disparaissent des articles la démarche suivie par les auteurs. Nous proposons donc ici, très schématiquement, un résumé de notre raisonnement, et, de fait, de la démarche ayant abouti à ce papier.

(Notion de type et rigidité) $\rightarrow$ Kaluza-Klein (5-ème dimension) $\rightarrow$ Rainich $\rightarrow$ Ricci$\neq 0$ $\rightarrow$ simplification du modèle de fibré (hypothèse 2) $\rightarrow$ vision de ce qu'un observateur "mesure" s'il néglige la 5-ième dimension.

8 Quelques problèmes de géométrie différentielle.

Nous avons laisser en suspens quelques petites questions de géométrie différentielle que l'on peut s'amuser à résoudre... Entre autres :

-Si dans une variété (M, g) de dimension 5, on suppose qu'il existe un $\epsilon > 0$ de sorte qu'en chaque point $x \in M$, il passe une unique géodésique fermée de longueur inférieure à ϵ, cette géodésique est-elle nécessairement non-homotope à un point ?

-Si dans le modèle de la section 4.2 on suppose $K = 0$, peut-on munir M d'une structure de fibré principal en cercle ?

-Compléter la démonstration du théorème 3...

9 Conclusion

Une des conclusions, prétentieuse, de ce papier est que la recherche d'une "théorie de tout" est, peut-être, illusoire. Cette recherche des physiciens n'est-elle pas finalement influencée par un principe mystique ? La conclusion de nos quelques remarques mathématiques est qu'il n'y a peut-être pas de lois universelles, mais que les "succès" de la physique ne sont peut-être dus qu'à l'étude de situations *géométriques* particulières.

Ainsi, poussant plus loin notre raisonnement, on peut voir la découverte des lois physiques (utilisables) comme la mise en place de structures mathématiques de plus en plus sophistiquées. Ainsi, révons un peu en présentant l'élaboration progressive de la construction menant à notre présentation des choses...

Au départ, l'univers est un ensemble de points.

Il apparaît que ces points ont des "relations". L'univers est un graphe, i.e. un ensemble de points E et la donnée d'un sous-ensemble de $E \times E$. Au niveau fondamental, l'univers a une structure discrète.

Ensuite, historiquement, pour les observateurs que nous sommes, faisant des observations et des mesures de mouvements liés à la gravitation et à l'électromagnétisme, l'univers est apparu comme ayant la structure d'un espace affine muni d'une métrique euclidienne. C'est la mécanique Newtonienne,

et l'électromagnétisme de Maxwell. Le passage à une structure lisse résulte sans doute des limitations de nos moyens de perception. Ainsi l'utilisation de la structure continue de $\mathbb{R}$ correspond à des processus de mesure "en moyenne". Elle présente bien sûr le monumental avantage de permettre l'utilisation de tous les outils surpuissants du calcul différentiel.

Puis, Riemann suggère que l'univers a peut-être la structure d'une variété différentielle. La mécanique classique est toujours vu comme reposant sur une métrique définie positive pour l'espace et une métrique séparée pour le "temps". On peut aussi modéliser la mécanique et l'électromagnétisme dans un espace affine de dimension 4 muni d'une forme quadratique dégénérée de signature (+,0,0,0) à laquelle on ajoute une métrique euclidienne sur un sous-espace de dimension 3 canoniquement associé à cette forme quadratique. Voir le cours de Michel Vaugon.

Einstein et Poincaré, en 1905, puis Minkowski un peu plus tard, montre, concernant les mesures de "distances" et de "temps", que l'univers doit être envisagé comme un espace affine de dimension 4 muni d'une forme quadratique de signature (-,+,+,+). L'espace-temps, ou espacetemps, est né.

En 1915, Einstein avec la relativité générale montre qu'il faut envisager l'espacetemps comme une variété łde dimension 4.

Nous suggérons ici que pour inclure l'électromagnétisme, on peut considérer l'espacetemps comme une variété łde dimension 5 vérifiant l'hypothèse 2 de la section 4.1.

Concernant la régularité de la variété espacetemps, il est intéressant de noter que les théorèmes de Cauchy, et donc le déterminisme, nécessite une régularité C^2 (un peu moins si on pinaille). Ainsi une variété analytique serait totalement rigide, ou déterministe. Une régularité moindre que C^1 (celle de la mécanique quantique ?), implique forcément un manque de déterminisme au sens classique.

Remarque : A la fameuse question : qu'est-ce que le temps ? on peut répondre que ce n'est rien d'autre que la manifestation de la signature Lorentzienne qui correspond le mieux aux observations actuelles.

Le progrès de nos appareils de mesure nous conduira sans doute à faire évoluer ces structures successives, soit vers des variétés de dimension supérieure munies de métriques de signatures peut-être plus compliquées, soit peut-être vers un retour à des structures discrètes... Manifestement, aujourd'hui, beaucoup de gens essayent beaucoup de choses...

10 Aide.

Nous regroupons ici quelques notations et conventions.

Dans tout le texte M (ou $\overline{M}$) désigne une variété łmunie d'une métrique g (ou $\overline{g}$). Pour $x \in M$, on note T_xM l'espace tangent à M en x.

On note toujours D la dérivée covariante associée à la connexion de Lévi-Civita de g. Ainsi pour des (champs de) vecteurs X, Y sur M, on note D_XY la dérivée covariante de Y par rapport à X, et pour un tenseur T, on note DT la différentielle covariante. On réserve ainsi la notation ∇ à l'écriture "avec des indices". On utilise d'ailleurs l'écriture en indices "à la Wald", [13], en ce sens que T^{ij}, par exemple, ne désigne pas des composantes dans une carte, mais sert plutôt à indiquer le type du tenseur T, et les contractions éventuelles. Alors

$\nabla_i T^{kl}$ désigne, selon cette convention, le type du tenseur DT si $T = T^{kl}$, ou, si l'on précise une carte, la composante $U_i{}^{kl}$ du tenseur $U = DT$.

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on identifie, pour un tenseur de rang 2, T^{ij} et T_{ij}. Pour un tel tenseur, on note ${}^{e}T$ l'endomorphisme associé par g, $T_i{}^{j}$. Attention, si T n'est pas symétrique, il faut bien préciser l'indice relevé (ou descendu).

Si f est une fonction et si X, Y sont des champs de vecteurs sur M, pour une contraction c sur les premiers indices, on a en écriture intrinsèque,

$$div_g((f.X \otimes Y) := c(D(f.X \otimes Y)) = D_X f.Y + f.div_g X.Y + f.D_X Y.$$

On note R_{ij} la courbure de Ricci, et $R = R_i^i$ la courbure scalaire de g.

Pour des vecteurs X, Y, on note $< X, Y >$ le sous-espace engendré par X et Y. Pour un sous-espace E de l'espace tangent en un point $T_x M$, on note $E^{\perp}$ ou $E^{\mathbf{g}\perp}$ l'orthogonal de E pour g_x.

Enfin, concernant les fluides de matière, suivant l'usage classique, par exemple [3] ou [13], un fluide parfait, dans le cadre classique de la relativité générale, est pour nous un domaine de la variété où le tenseur d'énergie-impulsion s'écrit $T^{ij} = \mu X^i X^j + \lambda(X^i X^j + g^{ij})$, soit $T = \mu X \otimes X + \lambda(X \otimes X + Id)$. Alors un fluide vraiment parfait, ou v-parfait, est pour nous un fluide parfait où $\lambda = 0$, i.e. $T^{ij} = \mu X^i X^j$, ce que les anglo-saxons appellent "dust".

Références

[1] J.P. Bourguignon. A mathematician's visit to Kaluza-Klein theory. 1988

[2] Y. Choquet-Bruhat. General Relativity and the Einstein equations. 2009

[3] S. Hawking and G.F.R Ellis. The large scale structure of space-time. 1973

[4] J. Jost. Geometry and Physics. A paraître.

[5] J.P. Luminet. L'univers chiffoné.

[6] C.W Misner, J.A. Wheeler. Classical Physics as Geometry. 1957

[7] J. M. Overduin, P. S. Wesson. Kaluza-Klein Gravity. 1998

[8] R. Penrose. The road to reality. 2004.

[9] P. Peter et J.P Uzan. Cosmologie primordiale. 2005

[10] G.Y. Rainich. Electrodynamics in the general relativity theory. 1925

[11] R.K. Sachs, H. Wu. General relativity for Mathematicians. 1977

[12] M. Vaugon. Petit manuel de Relativité Générale à l'usage des gens connaissant la géométrie Riemannienne. 2010. Disponible en ligne sur le site web de S. Collion : http ://web.me.com/stephanecollion/Site/Mathematiques.html

[13] R.M. Wald. General Relativity. 1984.